No.

Date

上
1 数学
2 力学
3 电磁学

下
4 热学
5 光学
6 原子
7 相对论
8 总结

如有遗失，烦请联系：

✉/[illegible]

不胜感激！

△ 热一相关

> 混合气体的过程：状态方程不影响，内能要分开计。

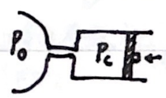
（道尔顿分压定律）

绝热注意一下，不是分组分各自绝热，不然温度会不同，要传热的，都化归到 $dQ=0$ 上：

$$\nu_1 C_{v1}dT+\nu_2 C_{v2}dT+pdV=0 \xRightarrow[p=p_1+p_2]{} \frac{dp}{p}+\underbrace{\frac{\nu_1C_{p1}+\nu_2C_{p2}}{\nu_1C_{v1}+\nu_2C_{v2}}}_{\gamma_*\ \text{等效绝热指数}}\frac{dV}{V}=0$$

> 热容量转变气体的过程：在转变温度（如 T_0 处 $\frac{5}{2}R\to\frac{7}{2}R$）需要吸收一定能量补充内能，相应就存在一些过程，如 $\Delta U=RT_0$，等压膨胀时会出现等压等温阶段，猛一吸热；绝热压缩时会出现绝热等温阶段，内压 $p\uparrow$ 做功给了 ΔU，类似（亦等体）等等。

> 充放气：经典理解方式



☆压功存在！$p_cV_c=W$.

（p_c 一直压至底，只是进入部分交换，用 U 等守恒量掠过混合过程）

$W=\Delta U_{外入+内}$（如果绝热）

放气基本一致。

▷ 求和改积分[方法]：

哪些是通过微元过程缓变的量，搞出差值 $p_{i+1}-p_i$，用 d 表示。

哪些是属于微元过程里的量，用 d 表示的微元量代换掉。

> 相变：还有一种是"化学反应"，它应该会近似告诉你反应物（生成物）总摩尔数远小于工作气体，只需要考虑放热（反应热）给工作气体（应该瞬时）升温即可。

☆ 相变潜热 L：单位是 J/kg，必须等温等压下衡量 $\Delta Q=mL$，并不是 m 气和 m 液在 T 下之间的 ΔU，应为 $\Delta U=\Delta M\left(\frac{RT}{\mu}-L\right)$（气→液），$(L=\underbrace{u_{气}-u_{液}}_{\Delta u}+p_sV)$

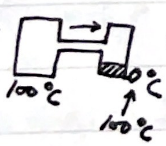
p_s — 饱和蒸气压

V — 单位质量体积 $\frac{RT}{\mu p_s}$

具体问题核心其实还是能量守恒，$W=\Delta U$（如果绝热）$\longrightarrow$ 若变温了，则还需 $\frac{dp_s}{dT}=\frac{L_m}{TV}$

ΔU 分为非相变部分 ΔU_1 (dT) 和相变部分 ΔU_2 (dn/dm) 考虑，其中 ΔU_2 即 ΔM 的，上面的式子。

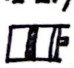
饱和蒸气压难度不大，就是分压到达 p_s 就维持 p_s 往下液化，不过注意，在细连通时



两边气压相等即要 $p_{空}$ 等，也要 $p_{水}$ 等，即左侧器里 $p_{水}$ 也为 $p_s(0℃)$。

> 热一 Tip：

- 双缸式的，多半 $V_{总}$ 不变且绝热，注意应用总体的能量守恒（略去互相做功）（把其中难到的一室绕开）
- 流管（多孔塞/加热网）其实也是一个热一，只不过 $\Delta E+\Delta U=Q+W$，多孔塞 $Q=0$，并且有 $W=p_1V_1-p_2V_2$ 可以合进路。
- 摩擦活塞（左右恒 $-\Delta p$）注意摩擦力作功 $\Delta p\cdot\Delta V$ 视为机械能！（解 $p\sim V$ 关系解决！）



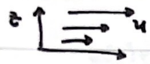
计算双缸等作功 = 各自压缩作功 + 摩擦力功。

No. 3

▫ 输运过程

i) 黏滞 动量流密度 $\frac{dp}{dt\,dS} = -\eta\frac{du}{dz}$ $\left(f = -\eta\frac{du}{dz}\cdot dS\right)$

Newton



▷ iii) 扩散中 n 只盯自己分子的，别的气体不影响。

ii) 热传导 热流密度 $\frac{dQ}{dt\,dS} = -\kappa\frac{dT}{dz}$

Fourier

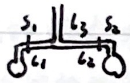
若三维，则改为梯度 $\nabla n, \nabla T$ …

iii) 扩散 粒子流密度 $\frac{dn}{dt\,dS} = -D\frac{dn}{dz}$

有些题可能搞比如柱筒，S变化，$2\pi rl$，这样不线性了。

题目描述常见"形成稳定…(传导扩散)"则即有固定的 n, Q 流，即 $\frac{dT}{dz}, \frac{dn}{dz}$ 线性分布。

举个例：



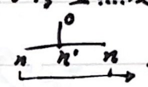
S_1, S_2 装相同水，$(l_1 < l_2)$ 温度恒定，上口大气干燥，开口大于平均自由程。

开 S_1 闭 S_2 过了 T_1 蒸发完

开 S_1 开 S_2 过了 T_2 全蒸发完

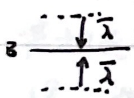
用 l_1, l_2, l_3 表示 $\frac{T_2}{T_1}$ $\Rightarrow = \frac{l_2+2l_3}{l_1+l_3}$

提示：设



饱和水汽处

附：物理量 q 的流：



$J_q = -\frac{1}{3}\frac{d(nq)}{dz}\bar{v}\bar{\lambda}\cdot\Delta S$

($\frac{1}{3}$来自于$\frac{1}{6}$方向平均和微分差$2\bar{\lambda}$)

i) $\eta = \frac{1}{3}\rho\bar{v}\bar{\lambda}$

ii) $\kappa = \frac{1}{3}\rho\bar{v}\bar{\lambda}c_v$

iii) $D = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{\lambda}$

当然，还有 $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$，$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$ (单一组分)

▫ 范氏气体 (光子气体见"□热辐射")

状态：$(p+\frac{a}{V^2})(V-b) = RT$ (若多摩尔则 V 应记为 V_m，即 $(p+\frac{\nu^2 a}{V^2})(V-\nu b) = \nu RT$，后类同)

内能：$U = C_vT - \frac{a}{V} + U_0$ ← 能态方程 $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = -p + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$

(微小卡诺可推导or麦氏关系)

由 $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + C_v dT$ 即得。

(有时候还是微分形式，万一 $C_v(T)$ 来一个)

做功仍为 pdV. 过程(多方)：$(p+\frac{a}{V^2})(V-b)^n = Const$

其热容与理想气体一致，$C = C_v + \frac{R}{1-n}$.

- 等温过程，内能仍然会变，仍然有 Q 传递。
- 绝热过程的做功建议 $=\Delta U$ 算。
- 多方过程的吸放热建议 $=C\Delta T$ 算。
- 卡诺定理仍然成立。$1-\frac{T_2}{T_1}$.

☆ 包括光子气也是 ($\propto T^4$)

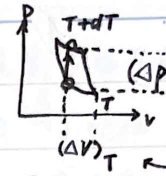
异工作物质一定注意 $U(V,T)$

每次计算最好都审查一遍热一

ΔU? ΔQ? W?

▽ 微小卡诺

认为某点 (p.v.T) 突然偏动了一个小卡诺回来.



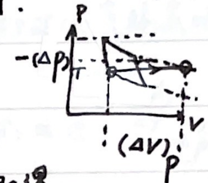
△这个很关键!

i 能物态方程 $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = -p + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$

$$\frac{(dT)_V}{T} = \frac{dW}{dQ} = \frac{(dV)_T(dp)_V}{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T (dV)_T + p(dV)_T}$$ 即得.

$dU + pdV$ ↗

我考察的 dQ 是沿 T 不变走的.



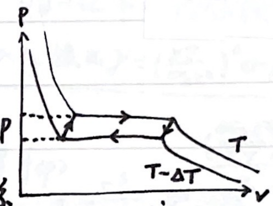
$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

$$\frac{(dT)_p}{T} = \frac{dW}{dQ} = \frac{-(dV)_p(dp)_T}{\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T (dp)_T - V(dp)_T}$$ 即得.

△这个和上面的 $(dp)_v$ 一样都是循环变化量.
(注意两组△的位点不一样,
其中 $(\Delta V)_p, (\Delta p)_v$ 的△与 $(\Delta T)_v, (\Delta T)_p$ 一致)
(ΔT可以这么认为了)

ii 克拉珀龙方程

中间的物态变化是一个等温等压过程.



$$\eta = \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta p(v_g - v_L)}{L}$$ (v为摩尔体积)

即得 $\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(v_g - v_L)}$ 饱和蒸气压 $p_{(T)}$ 关系.

(定压热容) L_0 0K时汽化热.

若相变潜热不视为不变: $L = H_g(T) - H_l(T) = (C_{gp} - C_{lp})T + H_g(0) - H_l(0)$

得 $\frac{dp}{dT} = \frac{L_0 + T(C_{gp} - C_{lp})}{T(v_g - v_L)} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dT(L_0 + (C_{gp} - C_{lp})T)}{RT^2} \Rightarrow p \sim T$ 关系.
$(p \propto T^{\circ} e^{-\frac{\circ}{T}})$

附: 相变有个"杠杆定则" $\underset{y_L}{v_L} \overset{|}{\text{—} V \text{—}} \underset{y_g}{v_g}$, 考试时还不如直接列质量和体积的等式照样快.

▽ 开放系统的理想气体

特征: 描述用强度量 p.T 作为 $\vec{r}$ 的函数, 以气团为研究对象. 处在交换和流动中.

① 重力场中的大气 ← 静力平衡

$\nabla p + \vec{f} = 0$ 即 $\frac{dp}{dz} - \rho g = 0$. $\rho = \frac{p\mu}{RT}$.

温度若认为不变 则是波尔兹曼分布
温度若认为 $T_{(z)} = T_0 - az$ ←

$$p_{(z)} = p_0 \cdot \left(\frac{T_{(z)}}{T_0}\right)^{\frac{\mu g}{aR}}$$

临界应该有
$d\gamma \cdot \mu g z + U_{(z)} = U_{(0)} + p_0 dV - p_z dV$
$\Rightarrow d\gamma \cdot \mu g z = d\gamma \cdot C_p T_0 - d\gamma \cdot C_p T_z$
则 $T_z = T_0 - \frac{\mu g}{C_p} z$

若微扰 (绝热浮动) $p_{(z)} = p_0 \cdot \left(\frac{T_{(z)}}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$ (或称绝热大气模型)

则 $a < \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} = \frac{\mu g}{C_p}$ 时, 扰动气团 T 低于外界 T.
浮力小, 能稳定不对流.

② 伯努利方程 ← 能量守恒

(均指单位质量"比")

$$u + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + \varphi = Const$$

内能、压功、动能、势能

③ 欧拉方程 ← 动量守恒

$A_{(x)}$
$p_{(x)} v_{(x)} \rho_{(x)}$
$T_{(x)}$

$-\oiint \vec{p} d\vec{A}\, t = m\vec{v_2} - m\vec{v_1}$

$-\iiint \frac{dp}{dx} \cdot A dx = (\rho v A) \cdot (v_2 - v_1)$

$\frac{1}{\mu} C_p T$ 比焓

$\rho v A = Const$ 质量

$\rho = \frac{p\mu}{RT}$ 物态

流管方程组 ☆

对上限求导 (实为一个∫) $-\frac{dp}{dx} = \rho v \frac{dv}{dx}$

$$\frac{dp}{dx} = -\rho v \frac{dv}{dx}$$

△ MB分布 / 分子动理论(一)

一些数学结论见"n维球"、"高维表"。麦克斯韦分布律推导见"高维表"。

▷ MB分布都是粒子数密度分布律，是 $n\propto e^{-\frac{E}{kT}}$. 比如三维球谐势能 $\frac{1}{2}\alpha r^2$ 有 $n=n_0e^{-\frac{\alpha r^2}{2kT}}$. 是 n 而非 $\frac{dN}{dr}$ (在三维球坐标下)可以直接类比得到 $\bar{r}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi\alpha}}$, $\sqrt{\overline{r^2}}$ 等.

> 相对论性(参非标)

粒子: 针对动量空间进行. $f(\vec{p})\propto e^{-\frac{\varepsilon(p)}{kT}}d^3\vec{p}$. $f(p)\propto p^2e^{-\frac{\varepsilon(p)}{kT}}dp$

由能动量关系将 p 通过 $\frac{dp}{d\beta}=\frac{m_0c^2}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$ 化为 $f(\beta)$ 即 $f(v)$

$$\Rightarrow f(\beta)\propto\frac{\beta^2}{(1-\beta^2)^{\frac{5}{2}}}e^{-\frac{m_0c^2}{kT}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)}$$

归一化常数 A 再由之积得

① 极端相对论粒子时 $A=\frac{1}{\int_0^1\cdots d\beta}\xrightarrow{\frac{m_0c^2}{kT}\ll1,\ 换元\ \gamma=\left(\frac{kT}{m_0c^2}\right)^2(1-\beta^2)}\frac{1}{\left(\frac{m_0c^2}{kT}\right)^{-3}\int_0^\infty\frac{e^{-\gamma^{-\frac{1}{2}}}}{2\gamma^{\frac{5}{2}}}d\gamma}$

$\frac{\left(\frac{m_0c^2}{kT}\right)^3}{2}$ ← t^2e^{-t} 形积分

光子时 $f(p)\propto p^2e^{-\frac{pc}{kT}}$ 直接积得 A. 得 $f(p)=\frac{c^3}{2k^3T^3}p^2e^{-\frac{pc}{kT}}$.

(参见"高维表")

> 泻流:

回顾: 泻流粒子一是与速度同向, 二是粒子数受到了 v 的加权. (准确说应为 v_x)

即 $F'(v)\propto vF(v)$ (应再乘以一个 $\int\cos\theta$ 积分的因子)

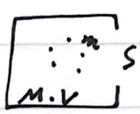
则归一化有 $F'(v)=\frac{v}{\bar{v}}F(v)=F_{n+1维}(v)$

泻流的影响: 一是 $\bar{\varepsilon}=2kT$, 带走能量导致容器内温度降低. $\frac{dU}{dt}=-\Gamma\bar{\varepsilon}\cdot S$

二是 粒子流带有与向动量 $\Gamma m\bar{v}_x\cdot S$, 会引起容器的反冲.

三, 以及不忘记 n 在变化, 注意积分时的变量.

例 35届决: T2C2



太空中, 初始 N_0, T_0 静止开始, 分子质量 m, 容器质量 $M\gg N_0m$. 小孔 S 较小, 容器不作转动. 求 (单原子)

(1) t 时刻气体温度 T (2) t 时刻容器速度大小 V

□ (1) $-2kTdN=d\left(\frac{3}{2}kNT\right)$

$dN=-\Gamma Sdt$ $\Rightarrow T=T_0\left(1+\frac{S}{6V}\sqrt{\frac{kT_0}{2\pi m}}t\right)^{-2}$.

(2) ▷ 相对容器近似对地. $dp=-m\bar{v}_x\Gamma Sdt$

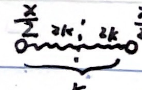
$$\Rightarrow u=\frac{p}{M}=\frac{6N_0}{7M}\sqrt{\frac{\pi mkT_0}{2}}\left[1-\left(1+\frac{S}{6V}\sqrt{\frac{kT_0}{2\pi m}}t\right)^{-7}\right]$$

▷ 其中 $\bar{v}_x$ 需求算. (与向泻流速率分布) $\bar{v}_y=\bar{v}_z=\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}$. 而 $\bar{v}_x$ 受到 v_x 加权. $\propto v_xe^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}$

归一化之 $A=\frac{m}{kT}$. 得 $\bar{v}_x=\sqrt{\frac{\pi kT}{2m}}$.

> 能均分定理:

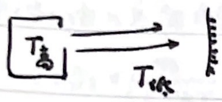
提醒: 振动自由度 $\frac{1}{2}kT$ = 势 = 动, 为两原子共有!



$\frac{1}{2}k_BT=\frac{1}{2}k\overline{x^2}=\frac{1}{2}\mu\overline{\dot{x}^2}$ $\left(\frac{m}{2}\right)$

△ MB分布／分子动理论(2)

> 相对速率：在两种气体均是麦克斯韦分布下，通过余弦定理、重积分 ⟹ $\bar{u}=\sqrt{\bar{v}_1^2+\bar{v}_2^2}$



还有一种是泻流出来相对空气，由于分布不同，近似方法也不同。

① $\sqrt{\bar{v}^2+\bar{v}^2}$ ② v_1 之定向  $\bar{u}=\int_0^{\pi}\sqrt{\bar{v}_1^2+\bar{v}_2^2-2\bar{v}_1\bar{v}_2\cos\theta}\,d\theta\cdot\frac{2\pi\sin\theta}{4\pi}=\frac{(\bar{v}_1+\bar{v}_2)^3-(\bar{v}_2-\bar{v}_1)^3}{6\bar{v}_1\bar{v}_2}$

相对速率分布：$f(u)=4\pi u^2\cdot\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{\mu u^2}{2kT}}$ 同形式的分布。

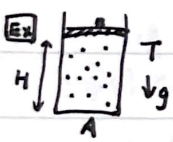
(《习作集》题6) 有一种常见的问法"要求99%不与外边空气相碰…"

注意不建议使用什么 $\int_0^{Ans}f(u)du$ 反解99%处的u，然后代入 $\bar{z}\cdot t\le 1$，是错误的！t跟u有关，这导致不能单单关注 $\bar{z}$，应该用

> 自由程分布：$N=N_0e^{-\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}}$ 指存留的概率，$\bar{\lambda}$ 则由 $\bar{u}$, n, D确定。

求导之后 $\frac{1}{\bar{\lambda}}e^{-\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}}$ 即为概率分布。

> 玻尔兹曼分布：ε_p 表达后代入即可，但有时需注意，T等量是否是变量？最本质的就是势场里微元的平衡。



m，N个分子在竖直气缸里，温度T，单原子分子。求(1)活塞固定H，热容 $C_v(T)$ (2)活塞 M_0，光滑上下移，热容 $C_p(T)$

⟹ (1) $C_v=\frac{5}{2}Nk-\left(\frac{mgH}{kT}\right)^2\cdot\frac{Nke^{\frac{mgH}{kT}}}{\left(e^{\frac{mgH}{kT}}-1\right)^2}$

(2) $C_p=\frac{5}{2}Nk$ (存在 $dW=M_0g\,dH$)

▽ 高维麦克斯韦分布律

能均分 $\frac{1}{2}kT$ + 归一化 ⇒ 每方向上 $\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m v_i^2}{2kT}}$　▷注意，这是矢量分布。单方向速率分布须 ×2。

$F(\vec{v})$ 由 n 方向相乘。

$$F(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{-m\vec{v}^2}{2kT}}$$

(可见"n维球")

> 速率分布 $F(v)$　由 $F(\vec{v})$ 乘以 n 维球表面积 S_n。

$$F(v) = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} v^{n-1} \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

$\ln F(\vec{v}^2) = \ln F(\vec{v}_x^2) + \ln F(\vec{v}_y^2) + \ln F(\vec{v}_z^2)$

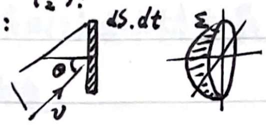
对 $\frac{\partial}{\partial v_x}, \frac{\partial}{\partial v_y}, \frac{\partial}{\partial v_z}$ 得连等

$$\frac{1}{F(\vec{v}^2)} \cdot \frac{\partial F}{\partial \vec{v}^2} \cdot \frac{\partial \vec{v}^2}{\partial \vec{v}_x^2} = \frac{1}{F(\vec{v}_i^2)} \cdot \frac{\partial F}{\partial \vec{v}_i^2} \quad i = x, y, z$$

则 $\frac{1}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial v^2} = k$ 常量

得 $F = e^{A - Bv^2}$

> 泻流：



① $dn = \int_\Sigma n \cdot f(\vec{v}) dv \cdot v\cos\theta \cdot d\Omega\, v^{n-1}$

高维立体角 $d\Omega = d\theta \sin\theta d\varphi \sin\theta \sin\varphi d\alpha \sin\theta \sin\varphi \sin\alpha d\beta \cdots$

积分时 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta$，其余 $\alpha, \beta, \varphi \cdots$ 皆 $\int_0^{2\pi}$，代入点火公式，得 $\int \cos\theta d\Omega = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)!!}$

再将 $f(\vec{v}) = \frac{F(v)}{S_n v^{n-1}}$ 代入，$n_{泻} = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{S_n (n-1)!!} n\bar{v} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{S_{n+1}}{S_n} n\bar{v}$。

② $n_{泻} = \frac{1}{2} n\bar{v}_x$，单方向 $\bar{v}_x = \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}$，将之化为 $\bar{v}$ 形式，$\bar{v}$ 由 $F(v)$ 得 $= \frac{S_n}{S_{n+1}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}$

(常用↗)

于是 $n_{泻} = n\bar{v} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{S_{n+1}}{S_n}$

泻流速率分布：$F'(v) = \frac{\frac{dn}{dv}}{n_{泻}} = \frac{v}{\bar{v}} F(v)$ —— 理解：泻流就是速度加权 $F' \sim v \cdot F$

$\bar{v}$ 积出。

$$F'(v) = \frac{2}{(\frac{n-1}{2})!} v^n \cdot \left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{n+1}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = F_{(n+1)}(v)$$

n 维泻流 ⟺ $n+1$ 维气体

附：

三　$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$　$\sqrt{\bar{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$　$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$

n 维方均根 ⟺ $n+1$ 维最概然

四 (三泻) ($S_4 = 2\pi^2$)　$\bar{v}' = \sqrt{\frac{9\pi kT}{8m}}$　$\sqrt{\bar{v^2}}' = \sqrt{\frac{4kT}{m}}$　$v_p' = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$

$G(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$　定义 $G(n) = \int_0^\infty x^n e^{-\lambda x^2} dx$

$G(1) = \frac{1}{2\lambda}$

$G(2) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda^3}}$

$G(3) = \frac{1}{2\lambda^2}$

$G(4) = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda^5}}$

$G(n+2) = \frac{n+1}{2\lambda} G(n)$ / $G(n) = \frac{n-1}{2\lambda} G(n-2)$

$G(n) = \frac{(\frac{n-1}{2})!}{2\lambda^{\frac{n+1}{2}}}$，$1 = G(n) S_{n+1} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{n+1}{2}}$

△ 熵

> 熵变计算：熵是状态量，所以多过程时，总熵变可以直接看总的初末态，不一定都$\int$积分。

{ 恒定热容 C　　$S=S_0+C\ln T$

{ 理想气体　$\Delta S=\nu R\ln\frac{V}{V_0}+\nu C_v\ln\frac{T}{T_0}=-\nu R\ln\frac{P}{P_0}+\nu C_p\ln\frac{T}{T_0}$　(NK)

工作气体视角 / 分子视角(下P分布)

$S=S_0+\nu R\left(\frac{1}{\gamma-1}\ln T+\ln V\right)$　(NK)

▷熵不变蕴含了绝热方程在里面，题目给什么工作物质S的论留个心。

▷注意V为单位体积！如混合 ν V + ν V → 2ν V+V　V应代 $\frac{V_1+V_2}{2}$。(更多见下)

有时候要求熵变最大/最小，试验感觉"越不可逆越大"。如 O $T_{高}$ ○○○○○ $T_{低}$

○○○○ 同温 S_{max}.

○○... 连续 S_{min}.

▷ 这也是使之降/升温最多的办法。"能达到的最…温度" [分批]

> 过程构造：

{ 单　　绝热 (若熵增则再稳恒升温)

{ 双　　各自绝热到达再卡诺机向外

(通常考察对外W)

↳即成为热源，$\frac{dQ_1}{dQ_2}=-\frac{dt_1}{dt_2}=\frac{t_1}{t_2}\Rightarrow t_1t_2=Const.$ (稳态)

> 寻找平衡态：

$T=\frac{dE}{dS}$

{ ①② $T_1=T_2$，$\frac{dE_1}{dS_1}=\frac{dE_2}{dS_2}$

{ $S_{总}=S_1+S_2$，$S_{总}$取max时稳定平衡。

* 平衡态不是一定有，于是题目会问"若可以共存…"

寻找最大功：　热二 $\Delta S\geq 0$　$\Delta S=0$ 时 W_{max} ⟵ $W=E_0-E$　$\frac{dW}{dS}=-T$

☆ 总结：热一 + 热二 (=0为极值)

能量守恒永远成立

(末态到底是同态还是奇态？列的时候要分清)

⇓ 给出"最小末温"之类的末态状态量的要求。

再由 $W=\Delta U$ 之类的得到 W_m. (如果体系孤立的话)

> 利用熵求解气体过程：

例 $P=6P_0+\frac{P_0}{V_0}V$　1mol理想气体经过该过程。

现求另一个准静态过程，每一温度上具有与该过程相同的热容，过$(4P_0,4V_0)$点。

□ $C(T)=C'(T)$ 热容作为T函数相同时

▷ 决定了 $S=\int\frac{C(T)}{T}dT$ 熵的行为也相同。

则 $S_{(T)}-S'_{(T)}=Const$，即 $\ln\frac{V_{(T)}}{V'_{(T)}}=Const=\ln k$

$P_{(T)}V_{(T)}=V'_{(T)}P'_{(T)}\Rightarrow$

$P'=6kP_0+\frac{P_0}{V_0}k^2V'$

初值定常数，$P'=3P_0+\frac{1}{4}\frac{P_0}{V_0}V'$.

> 混合熵：

ν V_1　ν V_2 → ν V_2　ν V_2 → 2ν $2V_2$ → 2ν V_1+V_2　(T　T　T　T)

$\Delta S=\nu k\ln\frac{(V_1+V_2)^2}{4V_1V_2}=2\nu k\ln\frac{V_1+V_2}{2}-\nu k\ln V_1-\nu k\ln V_2$

('单位体积'的说法认为仍可分辨，若擦去，则$\ln(V_1+V_2)$)

吉布斯佯谬：　2ν 2V　$2\nu R\ln 2V+2\nu C_v\ln T-2(\nu R\ln V+\nu C_v\ln T)$

$=2\nu R\ln 2$

ν V　ν V

若左右为同种气体，理论上ΔS应为0.

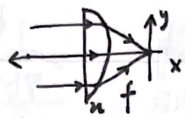
来源：信息熵 → 区分分子的信息 左？右？

每擦去1 bit 需熵增 $k\ln 2$.

$\Delta S=2N\cdot k\ln 2=2\nu R\ln 2$

△ 几何光学（二）

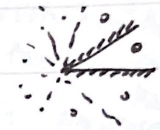
> 费马原理：比如求解严格成像面时，可以利用等光程的结论。



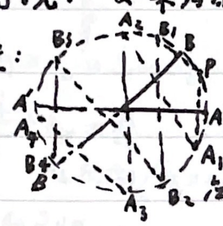
⇒ 旋转双曲面. $n(f-x)+\sqrt{y^2+x^2}=Const.$

存在某条光线
⇓
表达其光程 $L_{(n,\ x/r)}$
⇓
光程是极值 (or Const)
$0=\frac{dL}{dx}/\frac{dL}{dr}\cdots$ $(L=Const)$

> 夹角平面镜：如果考察光线或粒子运动轨迹，都是由补全对称面。

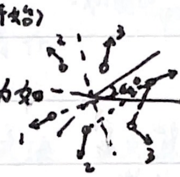


详细一些：



像点分 $\langle{A \atop B}$ 二类，$\widehat{A'B'}$ 对顶为吞没区（终结）
（先从A/B开始）

应用包括多普勒如



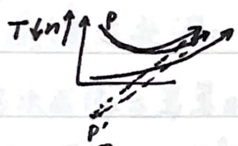
（声速u），回收到三种频率.

* 考试需证明

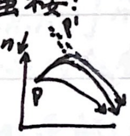
> 连续介质：光力类比可以帮助想象轨道，但实际上就是 $n_{(y)}\sin\theta=Const$ 或 $n_{(r)}r\sin\theta=Const$ 解微分方程.（可参见"折射定律.光力类比△"）

▷注意微分方程 $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\cdots}$ 有个正负即方向的问题，可以趁早判断。

海市蜃楼：



沙漠（天光），下现蜃景
倒像



海上（楼阁），上现蜃景
正像

还有同小量近似有关的，举个例子：Ex 引力造成星光偏转解释之：

$$n_{(r)}=1+\frac{2GM}{rc^2}$$

证明 $\delta=\frac{4GM}{dc^2}$

□ $k=\frac{2GM}{c^2}\ll 1.$ $nr\sin\theta=Const$ 有 $(r+k)\sin\theta=d$

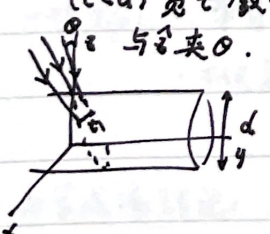
$\frac{\sin\theta}{r}=\frac{\Delta}{\frac{dr}{\cos\theta}}\Rightarrow\Delta_{总}=\int\frac{\tan\theta}{r}dr\rightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cdots)d\theta$

代入 r,θ 关联式积得 $2(\frac{\pi}{2}+\frac{k}{d})$. 得证.

> 解析型折反射：我们用波矢 $\vec{k}$ 表示光线的方向，点乘等形式表达夹角. 注意最好还是画立体，平面图思考角度之类的，不要完全陷入"表达每个矢量"的解析泥潭.

$\boxed{Ex}$ 在 $y=L$ $(L\gg d)$ 处放一垂直于 $\hat{y}$ 的大光屏 $(t<d)$ 宽 t 激光平行于 xoz 面射向圆柱. 与 $\hat{z}$ 夹 θ. 中心点射在 $y=0$ 处.

T2<3



（截面）

(1) 柱银质（反射）. 求屏上圆弧半径和张角 Θ_1.

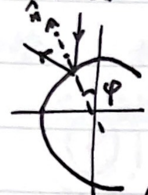
(2) 柱折射率 n. 下半面 $(z<0)$ 内镀银. 求屏上圆弧半径和张角 Θ_2.

$n=1.5.$ $t=\frac{\sqrt{3}}{2}d.$ $\theta=\frac{\pi}{3}.$

△ 几何光学(2)

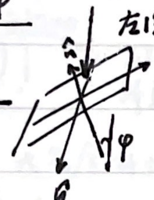
□ ▷张角(圆心角)反映光线歪斜，与φ无关，可取截面考察！(除了真"夹角)

(1)



k_y在切平面上，反/折射不变。

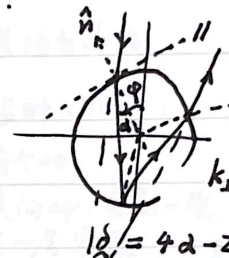
左图即$k_{\parallel} = k\cos\theta$反射情况，$\delta = 2\varphi$。



$$\theta_1 = 4\varphi_m = 4\sin^{-1}\frac{r}{d}$$

$L \gg d$时 $r_1 = r_2 = L\cot\theta$.

(2)



☆ (切平面内不变)

$k_y = k_y'$. $k_{\parallel} = k_{\parallel}'$

而$k' = nk$. 之!

$k_\perp = \sqrt{(nk)^2 - k_y^2 - k_{\parallel}^2}$

$$\tan\alpha = \frac{k_{\parallel}}{k_\perp} = \frac{\sin\varphi\cos\theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta - \cos^2\theta\sin^2\alpha}}$$

$\delta = 4\alpha - 2\varphi$

代入得 $\theta_2 = 2\delta_m$

(单调$\theta_{(\varphi)}$) $= 45.8°$

① $k_{\parallel}$不变 $\vec{k}$分析解法 ↑
$k_\perp$反向 / $k' = nk$

② (法向$\hat{n}$归一)
代矢量公式法 ▷只算$\vec{k}$，比如$\delta = 4\alpha - 2\varphi$等还要自己分析，或求个夹角$\alpha$。不然陷进去了。

(不推荐)
反 $\vec{k'} = \vec{k} - 2(\vec{k}\cdot\hat{n})\hat{n}$ (n_0代-1)

折 $\vec{k'} = \vec{k} - \left[\vec{k}\cdot\hat{n} + \sqrt{|\vec{k}|^2(n_0^2 - 1) + (\vec{k}\cdot\hat{n})^2}\right]\hat{n}$

> 透镜与光阑：以寻算题为主，多聚焦在分析光线角度等限制上，讲一些常见的点：

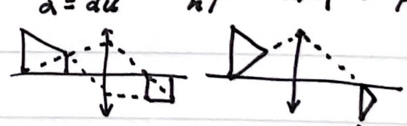
I. 多次成像在寻算时，如果是单线的较简便，有时是解多程式的，建议首尾两头往中间表达，再相等。书写注意整齐有序，高斯公式、$u=$、$v=$、$\beta=$、都一并列好。

II. 不建议做光瞳头瓶，直接分析临界光线，请画出来！

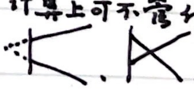
III. "光强…"问法很多见，理论上无需算主体角，因为是傍轴(二维不是θ^2是θ^3)，考虑的即是面积，常常光束是圆面，可能会计算 ◎；或是简单的 ◁ $\frac{\rho'^2}{\rho^2}$ (不过"I_0…"指单位面积)

IV. 公式常用：$yn\theta = y'n'\theta'$ 亦即 $\theta' = \frac{\theta}{\beta}$ ($n = n'$时)。纵向放大率 $\alpha = \frac{dv}{du} = -\frac{n'}{n}\beta^2$ 亦即 $\alpha = -\beta^2$ ($n = n'$时)
光角

V. 如果是非单点的几何物体成像，可以借助图像。
当然也有一种如图成图这类代数代换的。



VI. 一些Tip：· 带有平面镜系统，两个特殊位置 ⇉ . ⫽
· 不仅是光线，凡是拉直线然后距中轴r，都应想到两类
(有时只考察r大小，计算上可不管什么$+$、$-$)



* 光学成像结论：I. 平行玻璃砖，非傍轴α角 像点位于出射点、逆向走

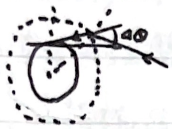
(α与$\alpha + \Delta\alpha$两条)
(傍轴 $u + \frac{d}{n}$处)

II. $\frac{1}{\cos\alpha}\left(u + \frac{d}{n}\frac{\cos^3\alpha}{\cos^3\beta}\right)$ 处。

▽ 落日

与之相关的"大气层光学"另见下文.

〉扁一些：太阳张角 $\Delta\varphi = \frac{2R_s}{r_{SE}}$. 大气层视为一层均匀介质.

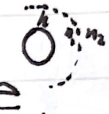


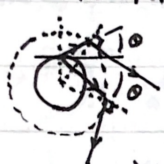
下沿为切地球时 $(\theta=0)$

正弦定理
折射定律 + 近似 ⇒ $\Delta\varphi$ 对应上沿有个 $\Delta\theta$.

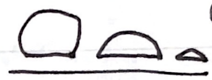
于是垂直向 $\Delta\theta$ 横向 $\Delta\varphi$. 会扁一些.

〉暗带：大气层在地表附近折射率突跃. 形成一层界面.

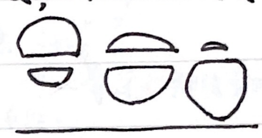




全反处之后暗带(光无法抵达)：



若在山上，可以接收负向的光线，下方对称的角度有同样的临界光线. 就类似于一条 2θ 的暗带.



〉绿色：

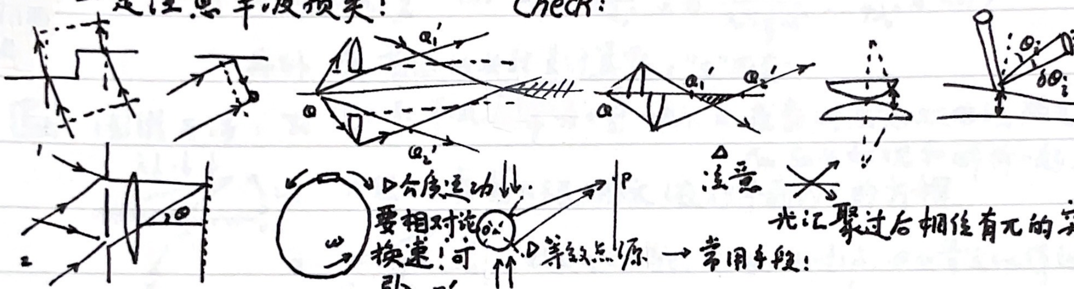
△ 干涉（一）

一般一大类问题都聚焦在光程差的计算上，主要是几何的计算。有时是画的两条具体光线算出相位差δ，有时找出等效的相干点源，有时会利用物像的等光程性。

（未考虑半波损!）一些常见的模型，也许考不到但也应清楚：杨氏双缝、菲涅耳双镜、洛埃镜、薄膜

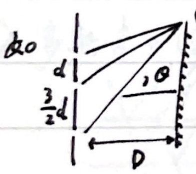
$\delta=2nd\cos i$、牛顿环（注意来回）、迈克尔逊仪、（法布里-珀罗仪）等。

一定注意半波损失！ Check:

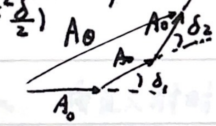


另一类问题聚焦在条纹的观察上，涉及δ与I的分析，然后可能需要做dI的积分（或者双线）

> $I=I_0\cdot\frac{1+\cos\delta}{2}$（或$\cos^2\frac{\delta}{2}$）两束光差$\delta$干涉是这样。有时候会回归到最原始的矢量图解法。



为

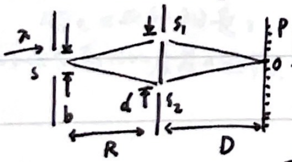


当然再复杂可能用复数，如多光束（见后页）

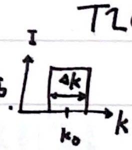
（复数是解决平面求和的利器，见"平面几何问题△"）

> 变参干涉：不同b、λ等提供了不同的dI，$dI_0\propto db,\ d\lambda,\ dk$ 等。

$\boxed{\text{Ex}}$ 杨氏双缝衬比度的影响： T2C1



$R=1m$，$D=1m$，$\lambda_0=500nm$。照明光具有一定谱分布。



当S_1、S_2间距d从$1mm$变至$2mm$时，

中心O处衬比度降为原$\frac{1}{2}$，距O $l_{op}=1cm$处衬比度降为原$\frac{1}{4}$。

(1) 求光源宽度b　(2) 求光谱宽度$\Delta\lambda$，并分析计算结果的误差。

□ 每份光元k、λ贡献光强dI，积分。★ $I=\int_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[1+\cos\left(\frac{kd}{D}\left(x+\frac{D}{R}\xi\right)\right)\right]d\xi\, dk$.

∝号为=了

▷ 积k更好，其实

亦可积λ，不过λ在三角函数里位于分母，小量近似提上来，结果与k小量出来后该相同。

$I\xrightarrow[\text{和差化积}]{\text{积}\xi}I=\int_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}}\left[b+\frac{2R}{kd}\cos\frac{kd}{D}x\sin\frac{kdb}{2R}\right]dk$

至此处已积出空间相干性即光源扩展的影响，其衬比度 $\gamma_1=\frac{\sin\frac{kdb}{2R}}{\frac{kdb}{2R}}\to\frac{\sin\frac{\pi db}{\lambda_0 R}}{\frac{\pi db}{\lambda_0 R}}$.

（$I_{(x)}=I_0(1+\gamma\cos\frac{kd}{D}x)$）

将γ处的k近似为了中值，有一定合理性，可见于(2)误差。

△ 干涉 (2)

再对k积分. $I = b\Delta k + b\Delta k \cdot \frac{\sin\frac{\pi d b}{\lambda_0 R}}{\frac{\pi d b}{\lambda_0 R}} \cdot \frac{\sin\frac{\Delta k d x}{2D}}{\frac{\Delta k d x}{2D}} \cdot \cos\frac{k_0 d}{D}x$

则得 $\gamma_2 = \frac{\sin\frac{\Delta k d x}{2D}}{\frac{\Delta k d x}{2D}} \approx \frac{\sin\frac{\pi\Delta\lambda d x}{\lambda_0^2 D}}{\frac{\pi\Delta\lambda d x}{\lambda_0^2 D}}$ 而 $\gamma = \gamma_1\cdot\gamma_2$. (1)(2)中b. Δλ可解 ⇒ $b = \frac{\lambda_0 R}{3d} = 0.17mm$

$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2 D}{3dx} = 8.3nm$

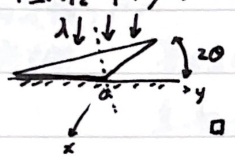
$\gamma_1(\lambda_0) = 0.82$

误差: i) $\gamma_1(\lambda_0+\frac{\Delta\lambda}{2}) - \gamma_1(\lambda_0-\frac{\Delta\lambda}{2}) = 0.005$. $\frac{0.005}{0.82} \approx 0.6\%$.

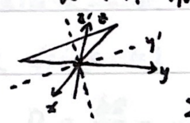
ii) 傍轴 $\frac{d}{R} \approx 0.1\%$ iii) $\Delta k \approx \frac{2\pi\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$ 实为 $\frac{2\pi\Delta\lambda}{\lambda_0^2-\frac{1}{4}\Delta\lambda^2}$. $\frac{\Delta\lambda^2}{4\lambda_0^2} \approx 0.01\%$

再补一道普通的光程差计算题 ("三"还有):

Ex 圆锥干涉: ☆ 注: I. 半波损常为 $+\frac{\lambda}{2} = k\lambda$. II. 条数时注意双曲线两支,应×2. k_m应从实观和解析一起考察. III. "中心为暗纹… 从中往外第10条明纹"注意植树问题, 其与中心差的是 $9+\frac{1}{2}$ 个λ!

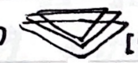


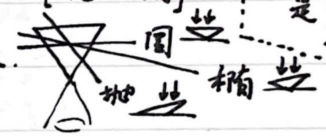
θ很小. 求第k级明纹(在xy平面内)的方程.



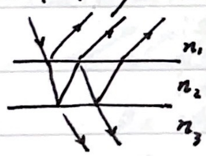
列出 $y'z' \sim yz$. 令 $2\delta = (k-\frac{1}{2})\lambda$. θ小量近似得到

⇒ $y = -\frac{\theta}{(k-\frac{1}{2})\lambda}x^2 + \frac{(k-\frac{1}{2})\lambda}{4\theta}$ [抛物线]

附: 解释: 等光程面  [圆锥] 曲面作为平面截之.



> 多光束干涉: 以增透膜为例:



垂直入射时 $r_{ij} = \frac{n_i-n_j}{n_i+n_j}$. $t_{ij} = \frac{2n_i}{n_i+n_j}$. 其中相差 $\delta = \frac{4\pi n_2 d}{\lambda}$

反射光 Ar_{12}. $At_{12}t_{21}r_{23}e^{i\delta}$. $At_{12}t_{21}r_{23}\cdot r_{21}r_{23}e^{2i\delta}$ …… $At_{12}t_{21}r_{23}e^{i\delta}\cdot(r_{21}r_{23}e^{i\delta})^{n-2}$

(顺便提, 这里的r,t是s光 (p, s) 没有0.π两种相位) 总 $A_R = A\left[r_{12} + \frac{t_{12}t_{21}r_{23}e^{i\delta}}{1-r_{21}r_{23}e^{i\delta}}\right] \xlongequal[\text{倒逆}]{\text{Stokes}} A\frac{r_{12}+r_{23}e^{i\delta}}{1-r_{21}r_{23}e^{i\delta}}$

关于这方面可以参考△偏振. $(A_R\tilde{A}_R)\ I_R = I\,\frac{r_{12}^2+r_{23}^2+2r_{12}r_{23}\cos\delta}{1+r_{21}^2r_{23}^2-2r_{21}r_{23}\cos\delta}$ 等于0时反射光完全消去.

① $\delta = (2k+1)\pi$. $r_{12} = r_{23}$

② $\delta = 2k\pi$. $r_{12} = -r_{23}$ ⇒

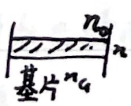
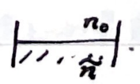
① $d = \frac{\lambda}{4n_2}(2k+1)$. $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$. $d_{min} = \frac{\lambda}{4n_2}$.

② $n_1 \neq n_3$时 $n_2 = 0$. 舍. $n_1 = n_3$. $d = \frac{\lambda}{2n_2}k$.

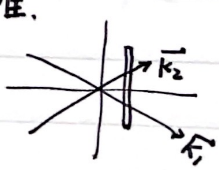
可以根据 $r = \left|\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right|$ 判断是否需要考虑多光束干涉.

通常在介质折射率较相近的近似下, 使用一二两束光干涉亦可得到 $n_2 = \sqrt{n_1 n_2}$ 等正确结论. (《难集》, $r \ll 1$ 近似, 如 $(1-r^2) \to 1$)

在多层膜时有一个"等效反射率"的替代. 在光学厚度为 $\frac{\lambda}{4}$ 时, $R = \left(\frac{n_0-\frac{n^2}{n_G}}{n_0+\frac{n^2}{n_G}}\right)^2$

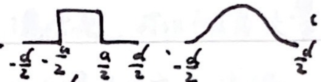
单面时 $r = \frac{n_0-n}{n_0+n}$. 故  ⟺ . $\tilde{n} = \frac{n^2}{n_G}$. 更多层逐级向上递推.

> 空间光场干涉: 碰到的似乎不多. 也不会有理论上的困难. 只需用 $A_0\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$ 或 $A_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ 叠加计算, 就可以彻表.



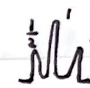
△ 衍射

波动光学，核心在于相位差引起的叠加特性。在不考虑偏振(方向正交)时，即是 $A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\delta_{12}=A^2$ 一个式子，并 $I\propto A^2$。衍射也只是进一步连续化为了积分，借了复数这一工具进行。

> 菲涅耳衍射积分公式。瞳函数  $(1+\cos\frac{2\pi x}{d})$

单元衍射：$\tilde{A}_{(\theta)}\propto\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}e^{ikx\sin\theta}dx\propto\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ $(\alpha=\frac{ka\sin\theta}{2})$

$\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}(1+\cos\frac{2\pi x}{d})e^{ikx\sin\theta}dx\propto\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{1}{2}\frac{\sin(\beta-\pi)}{\beta-\pi}+\frac{1}{2}\frac{\sin(\beta+\pi)}{\beta+\pi}$ $(\beta=\frac{kd\sin\theta}{2})$

仅三级。

N元干涉：（关心的是模）$\sum_{j=0}^{N-1}e^{ikd\sin\theta j}=\frac{1-e^{N\cdot ikd\sin\theta}}{1-e^{ikd\sin\theta}}$，$|\cdots|=\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}$。

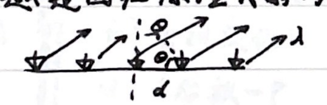
> 光栅：基础理论要熟悉。$I_{(\theta)}=I_0\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$。$\frac{d}{a}$ 导致的缺级。

主极大 $d\sin\theta=k\lambda$，中间 $N-2$ 个次极大。主极大半角宽 $\Delta\theta=\frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$。

色散本领 $D_\theta=\frac{\delta\theta}{\delta\lambda}=\frac{k}{d\cos\theta_k}$　色分辨本领 $R=\frac{\lambda}{\delta\lambda}=kN$。$(\Delta\theta=D_\theta\cdot\delta\lambda)$

一种是对经典理论的考察，如35届复赛7(DNA衍射)。

还有不少题是回归原理式的考察，最著名的模型就是相控阵雷达。



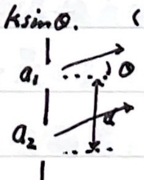
$\beta=\frac{\Delta\varphi_0+kd\sin\theta}{2}$

☆ β 称作"相邻单元相位差的一半"

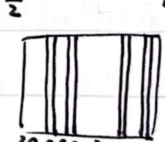
I. 如果问"主极大的条件"，一定是所有(包括经过调整单元)相位差为 $n\lambda$。

具体分布可以这么干：举个例子，坏了一个或者有两缝间距误为 $1.5d$（靠近中间的地方）

可将 分为左右（好的两组 N_1,N_2，各自 $A_1\propto\frac{\sin N_1\beta}{\sin\beta}$，$A_2\propto\frac{\sin N_2\beta}{\sin\beta}$，再由 A_1,A_2 进行 δ 相位差的叠加(干涉)，δ 即为两组中心点间距 $\times k\sin\theta$。（若 $N_1=N_2=\frac{N}{2}$ 即为 $\left(\frac{\sin\frac{N}{2}\beta}{\sin\beta}\cdot\cos\frac{\delta}{2}\right)^2$）

换回夫琅禾费衍射，亦即求解如此类问题：

注意这里 $\frac{A_1}{A_2}$ 还有 $\frac{a_1}{a_2}$，光强里还有 $a_1^2\cdot(\ )^2+a_2^2\cdot(\ )^2+2a_1a_2\cdot(\ )$



（缝缘隔 a 或 3a，共 2N）

$\frac{\sin\beta}{\beta}\cdot\cos2\beta\cdot\frac{\sin6N\beta}{\sin6\beta}$

II. 当光束(衍射波)强度高集中(于0级附近)时，通过改变 $\Delta\varphi_0$ 调控扫描方向，如 $\varphi_0=\Omega t$。

▷ 注意 $\frac{\Omega t}{2}$ 只附加于缝间干涉上(如果是调控如正弦光栅间单元相差的话)，单缝衍射的 β 多半是不用加的

转动后强度分布也会变化，正弦光栅也会有无数级了。

> 艾里斑：$0.61\frac{\lambda}{r}$，$1.22\frac{\lambda}{D}$ 是半角宽，$1.22\frac{\lambda}{r}$ 才是直径！

△偏振(一)

偏振光在同一方向上由相差进行叠合 $A_s^2=A_{1s}^2+A_{2s}^2+2A_{1s}A_{2s}\cos\delta$，在不同(正交)方向上独立。光强 $I=I_x+I_y=A_x^2+A_y^2$。如圆偏振光 $I=2A^2$。

注意，自然光和部分偏振光是混合光，可以视为大量线偏光的叠加（自然光只是其振幅相同，密度均匀），在经过偏振片后是A不定的线偏，但具有平均值 $\sqrt{\frac{I_0}{2}}$，部分偏振则可视为 $\sqrt{I_{max}}$，$\sqrt{I_{min}}$ 最终加和。（其实只要是两正交方向就能代表 $(\bar{A_1})^2+(\bar{A_2})^2$。）

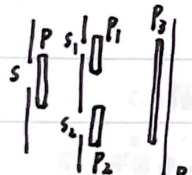
* 附：部分偏振光 i) $I_0=I_{max}+I_{min}$ 且max.min正交。ii) 偏振度 $P=\frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}}$。

iii) 就透过偏振片而言，部偏⇔ $\underset{2I_{min}}{\text{自然}}$ + $\underset{I_{max}-I_{min}}{\text{线偏}}$

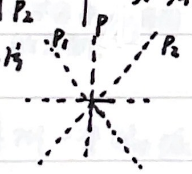
自然光和部偏光刚开始如马吕斯定律可以用 I_0 表示，一旦取线进行相位叠和操作后建议开根用A。

大部分题目都是研究偏振光的干涉，还是聚焦在光程差的计算和最终I.A的三角叠和上。如果绕来绕去很多，建议直接列x.y向振动。（一般是写振幅，脑子里记着相位差）

$\boxed{\text{Ex}}$ Check: 辅助：原干涉条纹极强处为 $4A^2=4I_0$。



偏振片



问条纹变化：

(1) S后放一P (2) 再于 $S_1.S_2$ 后放 $P_1.P_2$，夹45°角。

(3) 屏前再放一 P_3，与P同向。(4) 让 P_3 与P垂直。

(5) 拿掉P

(1) $2I_0$

(2) 无（人眼不区分偏振结构）

(3) $\frac{I_0}{2}$

(4) 移动半个条纹

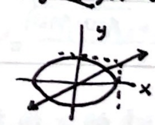
(5) 无（两单缝衍射相叠）

$\boxed{\text{Ex}}$ 一束单色部分椭圆偏振光（椭圆成分+非偏振成分）沿 $\hat{z}$。

起偏器沿 $\hat{x}$ 时透射光强最大 $1.5I_0$，$\hat{y}$ 时最小 I_0。(1) 透射轴与 $\hat{x}$ 成 θ 时的光强。(2) 先通过 $\frac{1}{4}$ 波片，波片轴沿 $\hat{x}$ 或 $\hat{y}$，再通过起偏器，发现与 $\hat{x}$ 成30°时透射光强最大。求非偏振成分在光中占比。

□ (1) $1.5I_0=I_u+I_{ex}$

$I_0=I_u+I_{ey}$



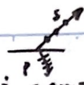
$I_\theta=I_u+I_{ex}\cos^2\theta+I_{ey}\sin^2\theta$

$=1.5I_0\cos^2\theta+I_0\sin^2\theta$

(2) $\frac{I_{ex}}{I_{ey}}=3 \Rightarrow I_u=\frac{3}{4}I_0.\ I_{ex}=\frac{3}{4}I_0.\ I_{ey}=\frac{1}{4}I_0$

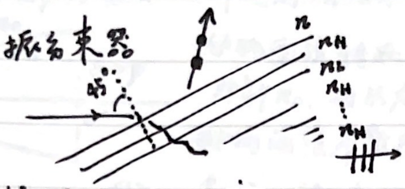
$\frac{2I_u}{2I_u+I_{ex}+I_{ey}}=60\%$

▽ 偏振 (二)



> 界面折反射： 反射光s占主导，折射光p占主导，布儒斯特角 $i_B=\arctan\frac{n_2}{n_1}$ 或 $\theta_{反}+\theta_{折}=\frac{\pi}{2}$.

偏振分束器



计算得有 $n=\frac{\sqrt{2}\,n_L n_H}{\sqrt{n_L^2+n_H^2}}$.

为使s光偏振度最大 → 这里深化一下前面"干涉"关于多光束的东西：

附：(E) 振幅反射率 $\tilde r$ $\tilde t$

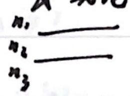
(I) 强度反射率 R T

$(W=IS)$ 能流反射率 $\mathcal{R}$ $\mathcal{T}$

$\mathcal{R}+\mathcal{T}=1$ $R=|\tilde r|^2$ $T=|\tilde t|^2$

$R+\frac{\cos i_2}{\cos i_1}T=1$

☆ 无论n怎么排，对反射光(透)要求是相长还是相消，



用1.2最初两束光直接导出的条件与用多光束得出的条件相同。但 $n=\sqrt{\circ\circ}$ 之类的折射率条件(指相位，即d)要严格导出还是要多光束。

例如：这里 n_H, n_L 已选好，为使 R_s 最大 则 (>< / <> 型)

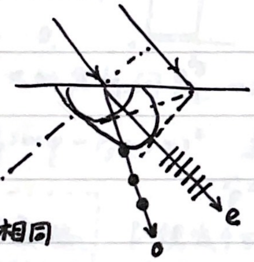
$$\begin{cases} 2n_H d_H\cos\theta_H=(k_1+\frac{1}{2})\lambda \\ 2n_L d_L\cos\theta_L=(k_2+\frac{1}{2})\lambda \end{cases}$$

在前面的增透膜里，为使 T_s 最大(也即 R_s 最小) (>> / << 型)

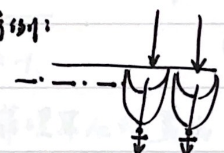
$$2nd\cos\theta=(k+\tfrac{1}{2})\lambda$$

> 双折射： 正晶体 $n_e>n_o$ ⦶ 负晶体 $n_e<n_o$ ⦶

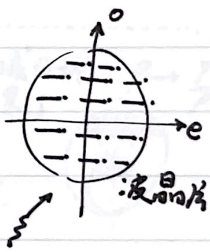
平面波入射



特例：

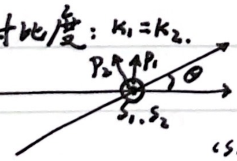


$\delta=(n_o-n_e)d\cdot\frac{2\pi}{\lambda}$.

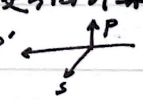


接下来附一些偏振光的例题.

Ex 求衬比度：$k_1=k_2$.



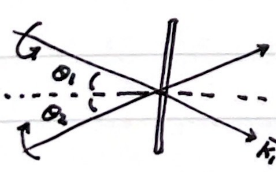
☆ 分解成三个正交方向计算，最后代数和.



设δ，最后±1得γ.

$P_1 . P_2 . I_0$ 表示 $I_{s1} . I_{s2} . I_{p1} . I_{p2}$，干涉 ⇒ $\gamma=\frac{\sqrt{(1+P_1)(1+P_2)}+\sqrt{(1-P_1)(1-P_2)}}{2}\cos\theta$.

$(A_{s1} . A_{s2} . A_{p1} . A_{p2})$

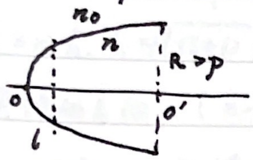


▷注意有时存在因坐标方向(投影)产生的π的相位差.

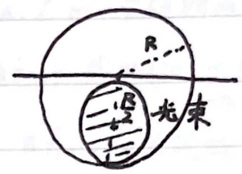
$$\Rightarrow \gamma=\frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1+I_2}\cdot(1+\cos(\theta_1+\theta_2))$$

▽ 偏振(三)

Ex 几何更多的偏振光折反射(菲涅耳公式): T3C2



抛物面旋转而成的介质 $n<n_0$. 外部 n_0. 光从右侧垂直射入. 抛物面焦参数 p. 考虑反射.



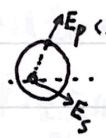
(1) 一条距 OO' 轴 h_0 的光, 各出射光的出射点距轴 h 为?

(2) 截去顶端长 $l=\frac{p^3}{2R^2}$ 一部分. 并在右侧放一偏振片. I_0 自然光入射(如图). 求光屏上光强分布.

□

(2) I. 定法面 ☆(光在里面)

II. 分解 s. p $\begin{cases} s\perp 法面 \\ p\perp s 和光线 \end{cases}$



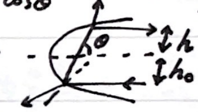
III. $\begin{cases} s 方向不变 \\ p 方向建议画图. 可能有 \pi! \end{cases}$

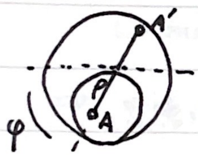
(1) 平行光过焦点. 采用极坐标.

$h_0=\frac{p}{1+\cos\theta}\sin\theta$. $h=\frac{p}{1-\cos\theta}\sin\theta$

$h_1=h_0$

$h_2=h_3=\frac{p^2}{h_0}$



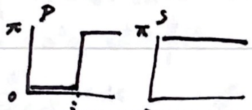


$A_s=\sqrt{\frac{I_0}{2}}\sin\varphi$ $A_p=\sqrt{\frac{I_0}{2}}\cos\varphi$

$I=A_s^2 r_{s1}^2 r_{s2}^2+A_p^2 r_{p1}^2 r_{p2}^2+2A_sA_p r_{s1}r_{s2} r_{p1}r_{p2}\cos\delta_{sp}$.

($\sin^2\varphi$, $\cos^2\varphi$, $\sin\varphi\cos\varphi$)

δ_{sp} 由外反射



姑且认为是 0.

再加上 π 的坐标问题. $\cos\delta_{sp}=-1$.

$\Rightarrow I=\frac{I_0}{2}(r_p\sin\varphi-r_s\cos\varphi)^2$ 再由菲涅耳公式算出 $r_p=r_{p1}\cdot r_{p2}$. $r_s=r_{s1}\cdot r_{s2}$. 代入即可.

⊃ $I(\rho,\varphi)$ 答案略.

▷但这个不是最终的 I!

光强 $\begin{cases} 振幅变化 \\ 密度(汇聚. 散开) \end{cases}$

要求 $h_0\geq\frac{p^2}{R}$. 若 $h_0<\frac{p^2}{R}$. 则 $h_2=\frac{R^2-p^2}{p^2-h_0^2}h_0$

然后区域分析: $\rho\to\frac{p^2}{\rho}$

[阴影]

(内部小圆为截下. 半径 $\frac{p^2}{R}$)

* 背记: $E_n=\frac{1}{2}mc^2\alpha^2\frac{Z^2}{n^2}$; $r_n=\frac{\hbar}{mc\alpha}\cdot\frac{n^2}{Z}$; $v_n=\alpha c\cdot\frac{Z}{n}$ ($E_\infty=13.6eV$)

▽ 玻尔-索末菲模型

由量子力学薛定谔方程解(氢原子)得到三个量子数 n, l, m. 分别对应了 $E_n=-(\frac{Z}{n})^2E_\infty$, $L_z=m\hbar$, $L=\sqrt{l(l+1)}\hbar$. 不过 $L_z, L_x, L_y, (L)$ 不能够同时确定的. 我观测了 L_z, 就无法确定 L 具体的方向. ($n-1\ge l\ge |m|$)

(n,m,l) 3方向是任定的.

> 玻尔经典模型中, $E_n=-(\frac{Z}{n})^2E_\infty$ 而 $L_z=L=n\hbar$. 这个首先是一个错误的认识. 只是经典圆轨道下的"量子化". 在索末菲当中变为 $L_z=n_\varphi\hbar$. 是一个另外的量子数(角). 直接用 $\mu=\frac{m_e}{2}$ 最好.

先把经典玻尔推导推一遍: (*注意. $L=n\hbar$ 是玻尔给出的, 如电子偶素 $n\hbar=2m_evr$)

经典轨道与定态条件 + 频率条件(里德伯方程) + 角动量量子化/对应原理

$E=-\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $E_n=-\frac{Rhc}{n^2}$ $L=n\hbar$ / $f=\frac{v}{2\pi r}=\frac{2Rc}{n^3}$ (在n很大时)

$L=mr\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mr}}$

$\Rightarrow$ 里德伯常量 $R=\frac{2\pi^2e^4m}{(4\pi\varepsilon_0)^2ch^3}=\frac{E_\infty}{hc}=\frac{1}{2}m(\alpha c)^2\cdot\frac{1}{hc}$ [精细结构常数 $\alpha=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}=\frac{e^2}{2\varepsilon_0 ch}$]

$r_n=n^2\cdot\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}=n^2a_0$ 玻尔半径 $E_n=-\frac{1}{2}m(\alpha c)^2\cdot\frac{1}{n^2}$ (大概影响第四位数 $p\sim e$)

$v_1=\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 ma_0}}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}=\alpha c$

i) 二体修正 R中 $m\to\frac{m_em_A}{m_e+m_A}$ 即 $R\to\frac{R}{1+\frac{m_e}{m_A}}$

▷一般的双原子体系, 直接套用结论, 即 $m\to\mu$, $e^2\to Ze^2$,
$E_1=\frac{1}{2}\mu(\alpha c)^2Z^2$, $r_1=\frac{a_0m_e}{\mu}\cdot\frac{1}{Z}$

ii) 类氢光谱 $R\to RZ^2$ 即光谱公式中 $\frac{1}{(\frac{n}{2})^2}-\frac{1}{(\frac{n'}{2})^2}$.

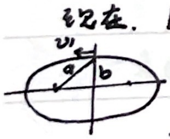
> 索末菲 —— 椭圆修正

$E=-\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$ 与b无关.

在$b=a$的特殊情形下. 由玻尔理论 $L=mva=n\hbar$. $m\frac{v^2}{a}=\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$.

得 $E=-\frac{mZ^2e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2n^2\hbar^2}$ (就是上面玻尔理论的式子)

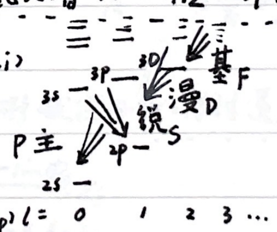
现在. $L=mbv_1=n_\varphi\hbar$. $E=\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$.



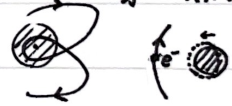
得 $b=\frac{4\pi\varepsilon_0 nn_\varphi\hbar^2}{mZe^2}$

有 $\frac{b}{a}=\frac{n_\varphi}{n}$.

碱金属光谱(Li)



关于能级分裂: 轨道贯穿和原子实极化



索末菲提出 $\oint p_rdr=n_rh$. $\oint p_\varphi d\varphi=n_\varphi h$. ($n=n_r+n_\varphi$)

积分得 $E=mc^2\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{(n_r+\sqrt{n_\varphi^2-\alpha^2})^2}}}$ (相对论)

> 索末菲 —— 相对论修正 解除了能级对 n_φ 的简并.

可以先看一下▽有心力场(1中)

有 $u=A\cos(\sqrt{1-(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 cL})^2}\varphi)+\frac{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2L^2}}{1-(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 cL})^2}$

即 $u=A\cos(\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{n_\varphi^2}}\varphi)+\frac{E}{\hbar c}\frac{\alpha}{n_\varphi^2-\alpha^2}$

另外, 在近似圆轨道下, 还可以留有主量子数的概念:

$E_n=mc^2(\sqrt{1-\beta^2}-1)$. $\beta=\frac{\alpha}{n}$ ($\frac{\alpha Z}{n}$)

故展开有 $E_n=-\frac{mc^2}{2}(\frac{Z\alpha}{n})^2[1+\frac{1}{4}(\frac{Z\alpha}{n})^2+\cdots]$

iii) 等效Z^*的概念: $m\uparrow$ $a\downarrow$ $(r\downarrow)$, 离核很近(有影响会让你算核内的情形. 那就从头推)
对于外部电子, 相当于核被屏蔽了一定电量.
如He原子两电子处于1s和4f态时能量: $E=-13.6\times\frac{2^2}{1^2}-13.6\times\frac{1^2}{4^2}=-55.25eV$

△ 热辐射 (一)

类比泻流 $r = \frac{1}{4} c\, u_{(T,\lambda)}$

> 基础理论：基尔霍夫定律 $f(T,\lambda) = \frac{r(T,\lambda)}{a(T,\lambda)}$ $\longrightarrow$ 辐射本领 $\frac{dE_{发}(T,\lambda)}{d\lambda}$

$\longrightarrow$ 吸收本领 $\frac{dE_{吸}(T,\lambda)}{dE_{外来}(T,\lambda)}$

▷ 吸收率 = 发射率 (比辐射率)　　与物体无关　　(ds, dt, dλ 内)

普朗克公式 $r_{(T,\lambda)} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$

斯特藩定律 σT^4 —— 总功率, 黑体

$\sigma = \frac{2}{15} \frac{\pi^5 k^4}{c^2 h^3}$.

朗伯体  $[\cos\theta]$ 反射和发射

维恩位移定律 $\lambda_m T = b = \frac{hc}{kx_m}$ $(5e^{-x_m} + x_m - 5 = 0$, $x_m = 4.965)$

柱 $\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{2}$　球 $\int 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

> 光子气体：大部分题只需抓住物态关系 $p \propto T^4$ 和过程方程，结合热一做推导即可。

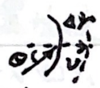
常见：绝热 $T^3 V = \text{const}$.　等温 = 等压　内能变化 $u\,dV$!

$p = \frac{1}{3} n \overline{p \cdot v} = \frac{1}{3} u$　　泻流 $E = \frac{1}{4} c n \varepsilon_k = \frac{1}{4} c u$. 则 $p = \frac{1}{3} \frac{4\sigma}{c} T^4 = \frac{1}{3} a T^4$

▷ $\sigma \sim a$ 是辐射～气体的区别.　　$u = aT^4$

有些地方记 $a \equiv \frac{4\sigma}{c}$.　$/m^2 s$　$/m^3$　　$S = \frac{4}{3} a T^3 V = \frac{16\sigma}{3c} T^3 V$

∴ 光子气不断反射储存在腔体里.

设想缓绝热膨胀 

$\Delta t = \frac{2r\cos\theta}{c}$. $\Delta r = v\Delta t$.

$\left.\Delta\nu = -2\cos\theta \frac{v}{c} \cdot \nu = -\frac{\Delta r}{r} \nu\right\}$ $\frac{\lambda}{r} = \text{const}$.

辐射熵流 $s = \frac{4}{3} \sigma T^3$. 考虑一热机，最大功时用的条件为 $\Delta S = 0$. 即 $\frac{4}{3}\sigma (T_1^3 - T_2^3) \cdot T_2 = Q_{放}$

(朗斯堡效率) $\eta = 1 - \frac{4}{3}\frac{T_2}{T_1} + \frac{1}{3}\frac{T_2^4}{T_1^4}$.　$\sigma T_1^4 = Q_{吸}$

> 热力平衡的思想：虚构同 T 平衡或形状因子可以倒逆.

以柱偏心为例: 

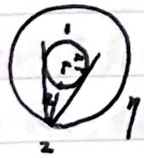
2 上 $d\theta$ 传给 $1 = \sigma T_2^4 \cdot \frac{\sin\theta_2 - \sin\theta_1}{2} \cdot dS$

则 1 传给 2 上 $d\theta = \sigma T_1^4 \cdot$ (同样部分)

其它 2 传给 2 上 $d\theta = \sigma T_2^4 \cdot (dS -$ 同样部分)

> η 一定反射率 (一)：某面元/体元的能流守恒. ⇒) ⇒

内外热流 $\underset{P_2}{\overset{P_1}{\rightleftarrows}}$ $P_1 - P_2$ 即为外传 (需补偿) 的量.

以柱同心为例: 

$\because k = \frac{r}{R}$　$\therefore$ 收 $P_1 P_2$

发 $P_1' P_2'$

(作到角反称作 "发+反")

$$\begin{cases} P_1 = kP_2' \\ P_2 = P_1' + (1-k)P_2' \\ P_1' = \sigma T_1^4 \cdot 2\pi r (1-\eta) + \eta P_1 \\ P_2' = \sigma T_2^4 \cdot 2\pi R (1-\eta) + \eta P_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \phi = P_1' - P_1 = \cdots$

△ 热辐射 (2)

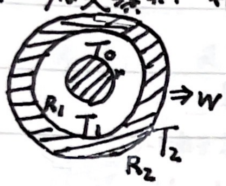
> η一定反射率 (2)：首先要注意题给是反射率η，还是吸收率(比辐射率)e.

(一)中举的例子里是二维，不是很全面，但思路上就是：i 接收比例 (内部则是热流) ii 热平衡/收发方程 (吸收，T表示)

① 终量代换　设(柱) f_1, f_2为热辐+反射[发]，f_1', f_2'为接[收].

② 无穷求和　η^n或$(1-e)^n$求和. 先发出去一个σT^4再来回弹.

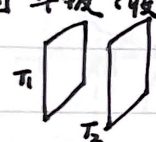
$\boxed{\text{Ex}}$ 3/后文赛：补充明确作假设. □　T3C1



T　(1)(2)略 已知W大小.

T, R_1, r. 求T_0. $e=0.8$.

$\boxed{\text{Ex}}$ 平板 (收发为1)：



$T_1 > T_2$.

(1) 比辐射率e. 单位面积和时间上传递的能量W

(2) 在两板间插n块相同的孤立黑体板，求W

(2) W相同. $W = \sigma(eT_1^4 - et_1^4) = \sigma(t_1^4 - t_2^4) = \cdots = \sigma(t_{n-1}^4 - t_n^4) =$ $\sigma(et_n^4 - eT_2^4)$

$\Rightarrow W = \dfrac{\sigma(eT_1^4 - eT_2^4)}{(n-1)e+2}$.

□ (1) ① $\begin{cases} e\sigma T_1^4 + (1-e)f_2 = f_1 \\ e\sigma T_2^4 + (1-e)f_1 = f_2 \end{cases}$　$\Rightarrow W = f_1 - f_2 = \dfrac{\sigma e^2(T_1^4 - T_2^4)}{1-(1-e)^2}$.

$\dfrac{1}{(1-e^2)^2}$为求和. ② $f_1 = \sigma T_1^4 \cdot \dfrac{1}{(1-e)^2} + \sigma T_2^4(1-e)\cdot\dfrac{1}{(1-e)^2}$

△ 衰变

$A = A_0 e^{-\lambda t}$, $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}$. 活度$A' = \lambda A$. 计算时可以先算出大气(初始)活度 次/g·s

$t = \dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{A_0}{A}$. $\Delta t = \dfrac{1}{\lambda}\cdot\dfrac{\Delta A}{A}$　而古样品即$\dfrac{A_t}{A_0}$活度存在一比例.

> 放射性系衰变平衡：足够长时间(数个$T_{1/2}$后)，母体子体活度相等($\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \cdots$). (=外界补充)

9.有头尾在增减(或有外界刺激补充). 比如大气$^{14}C : ^{12}C \approx 10^{-12}$. 活度14次/g·min.
(母体λ很大)

> 统计误差：泊松分布 $\dfrac{\Delta A}{A} = \dfrac{1}{\sqrt{A}}$. 应用$\Delta t = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\Delta A}{A}$. A再由探测的A'得到.

▷注意，本底有时，若本底A_B精确测得 ($\Delta A_B = 0$)，则应改为 $\Delta A = \sqrt{A + A_B}$.

▽ 量子力学：一维定态解

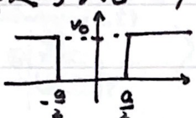
薛定谔方程 $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi=(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V_{(\vec r)})\psi$ （哈密顿算符 $\hat{H}\varphi=E\varphi$）

在不含时（定态）$\psi(\vec r,t)$ 可分离成 $R(\vec r)$, $T(t)$. ⇒ $i\hbar\frac{T'}{T}=\hat{H}\frac{R}{R}=Const=E$，$T(t)=e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$

则化为一维定态薛定谔方程 $\ddot\psi+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_{(x)})\psi=0$

* 注意解 $\ddot y-k^2y=0$ 时不要先搞 $ch(kx+\varphi)$（φ可能虚），不如 $e^{kt}+e^{-kt}$ 来得简便（首选指数式）

① 有限深势阱（束缚态 $E<V_0$）

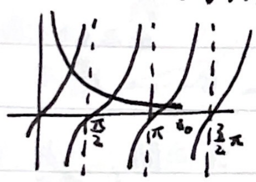


$k_1=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$. $k_2=\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$.

$A_1e^{k_2x}$ / $B_1\sin k_1x+B_2\cos k_1x$ / $C_1e^{-k_2x}$

条件：无穷远处收敛
边界处ψ, ψ'连续
（由于对称，可只取$\frac{a}{2}$一处边界）

ψ可有 $\begin{cases}\text{奇宇称}\\ \text{偶宇称}\end{cases}$ ⟶ 分别对应 $\begin{cases}B_1\sin k_1x\\ B_2\cos k_1x\end{cases}$



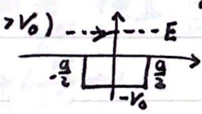
得 $\begin{cases}\tan k_1\frac{a}{2}=-\frac{k_1}{k_2}\\ \tan k_1\frac{a}{2}=\frac{k_2}{k_1}\end{cases}$ （稳定存在的E的方程）

化简，令 $z=k_1\frac{a}{2}$，$z_0=\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}\frac{a}{2}$，则 $\begin{cases}\sqrt{\frac{z_0^2}{z^2}-1}=-\cot z\\ \sqrt{\frac{z_0^2}{z^2}-1}=\tan z\end{cases}$

可见，$V_0\to\infty$ 即 $z_0\to\infty$ 时 $z=\frac{n}{2}\pi$. $E=n^2\cdot\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$（无限深方势阱）

$V_0\to 0$ 时始终存在有一个解.

② （散射态 $E>V_0$）



$k_1=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$. $k_2=\sqrt{\frac{2m(V_0+E)}{\hbar^2}}$.

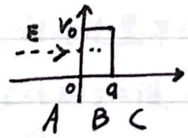
$A_1e^{ik_1x}+A_2e^{-ik_1x}$ / $B_1\sin k_2x+B_2\cos k_2x$ / $C_1e^{ik_1x}$

边界条件⇒ $C_1=A_1\cdot\frac{e^{-2ik_1a}}{\cos k_2a-i\frac{k_1^2+k_2^2}{2k_1k_2}\sin k_2a}$

透射系数 $T=\left|\frac{C_1^2}{A_1^2}\right|=\frac{1}{1+\frac{V_0^2}{4E(E+V_0)}\sin^2\frac{a}{\hbar}\sqrt{2m(E+V_0)}}$

在$T=1$时即 $E+V_0=n^2\cdot\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ 共振透射（势阱透明）

③ 方势垒



$k_1=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$. $k_2=\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$

扫描隧道显微镜.

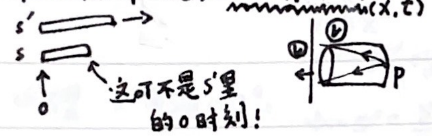
$A_1e^{ik_1x}+A_2e^{-ik_1x}$ / $B_1e^{k_2x}+B_2e^{-k_2x}$（不要ch）/ $C_1e^{ik_1x}$

请自己算一遍. 边界条件⇒ $T=\left|\frac{C_1^2}{A_1^2}\right|=\frac{4k_1^2k_2^2}{(k_1^2+k_2^2)sh^2k_2a+4k_1^2k_2^2}$（隧穿几率）

△ 相对论时空（一）

如果问题是一维的，可以使用时空图（扣分风险）。洛伦兹变换应该是所有问题的正解。二维光影、光行差时空图都不会简便。洛伦兹变换核心：灵活换系，正确判断尺缩钟慢，标清事件，不要太死板。

☆ 提醒见"考试易错小点.docx"。
* 铁轨圆环问题见"考试易错小点.docx"。



\> 公式：[坐标] …

[速度] $u_x' = \dfrac{u_x - v}{1-\frac{u_x v}{c^2}}$　$u_y' = \dfrac{u_y}{\gamma(1-\frac{u_x v}{c^2})}$

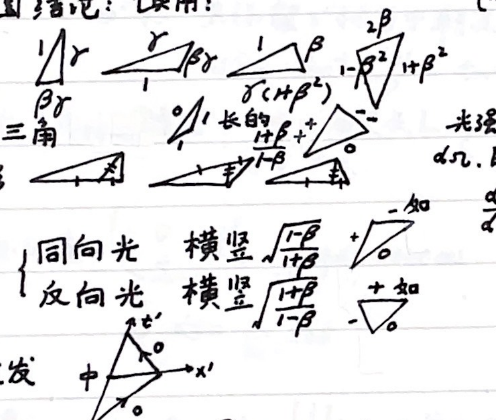
[加速度] $a_x' = \dfrac{a_x}{\gamma^3(1-\frac{u_x v}{c^2})^3}$　$a_y' = \dfrac{1}{\gamma^2(1-\frac{u_x v}{c^2})^2}\left[a_y + \dfrac{a_x\frac{u_y v}{c^2}}{1-\frac{u_x v}{c^2}}\right]$

[光行差] $\cos\theta' = \dfrac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}$　$1-\beta^2 = (1-\beta\cos\theta)(1+\beta\cos\theta')$

光强等研究 $d\Omega$，即是 $\dfrac{d(\cos\theta')}{d(\cos\theta)}$。

（对应速度）$\nu' = \dfrac{\nu(1-\beta\cos\theta)}{\sqrt{1-\beta^2}}$　（特例：共线 $\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$）

\> 时空图结论：慎用！



▷ 用时注意本质就是速度变换。

光 θ π-θ 这个角度说的不是钝的！

而且注意这只是光的公式，什么粒子杆子夹角变换老实按 $\tan\theta$ 来。（介质里的光！）

☆ 它问从哪个系看就尽量换哪个系（条件多）。

请尽量不要在S系里说两个都有速度的点（而且还是问它看来时间），善于换系思考。

多用 $\Delta t\sim\Delta t'\sim\Delta x\sim\Delta x'$ "xx系看来什么的时间差"。以及，相对论里平均量尽量用定义 $\bar{a} = \dfrac{\int a\,dt}{\int dt}$。

[能动量] $x \leftrightarrow p_x$，$t \leftrightarrow m = \dfrac{E}{c^2}$　$p_x' = \gamma(p_x - \dfrac{vE}{c^2})$　$E' = \gamma(E - vp_x)$

▷ [力] $F_x' = \dfrac{F_x - \frac{v}{c^2}\vec F\cdot\vec u}{1-\frac{u_x v}{c^2}}$　$F_y' = \dfrac{F_y}{\gamma(1-\frac{u_x v}{c^2})}$

注意：F是合力，$\vec u$是接触点速度。

[电磁场] ……（见"广适a"）

（非相对论：略去γ，$\vec{E'} = \vec E + \vec v\times\vec B$，$\vec{B'} = \vec B - \dfrac{1}{c^2}\vec v\times\vec E$）

\> 光影（一）：这已经到了二维，一般不用时空图，除了垂直接到都很难的。

Ex 灯下散步：

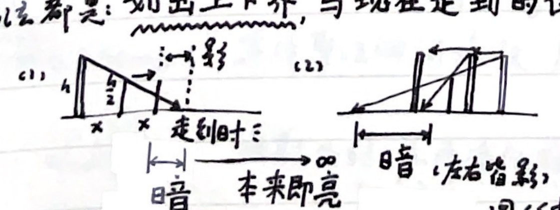
求（1）地系里间距 $\frac{h}{2}$ 时影长

（2）人系里间距 $\frac{h}{2}$ 时影长

（3）接（2），此时影长的变化率

⊳（1）$s_1 =$ 0.（2）$s_2 =$ 0.（3）$s =$

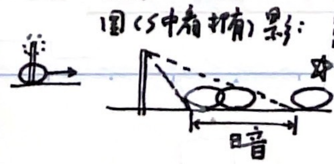
□ 或者都是：划出上下界，与现在走到的位置比较。



理解：i) 划过头顶起该角度光线开始使用空中那一段"储蓄"，划出的界就是该时刻储蓄刚好用完的角度。

ii) 高度对应函数：

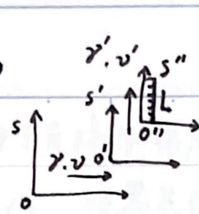
圆（S中看椭）影：



有左右两切界时暗在中间（其实前面脚就是另一界）

附：解出 $\Delta t<0$ 则舍去。若 $L<0$ 表示影在左边了。

△ 相对论时空(2)



▷ 准确而言，在 $S\to S'$ 中，S'' 相对于 S 应是 y 方向未受到个 v' 的迟延影响

$S\to S'\to S''$ 则是

其实最好按照 S, S', S'' 思考即可，这里只是留印象。

> 托马斯进动：

S'' 相对 S' y 向 v', γ'

S' 相对 S x 向 v, γ.

S 中看 OO''：

$x' = \gamma(x - vt)$

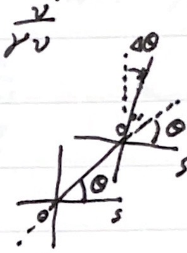
$y' = y$

$x'' = x'$

$y'' = \gamma'(y' - v't')$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{v't'}{vt} = \dfrac{v'}{\gamma v}$

(O'': $x''=0, y''=0$)



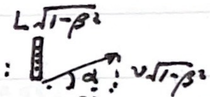
同理 S'' 中看 OO''：$\tan\theta'' = \dfrac{y''}{x''} = \dfrac{-v't'\gamma'}{-vt\gamma} = \dfrac{\gamma' v'}{v}$

$\theta'' \neq \theta$，坐标架 S'' 相当于转过了一个角度 $\Delta\theta$.

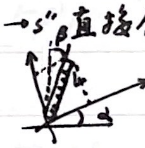
$\Delta\theta = \tan^{-1}\dfrac{\gamma' v'}{v} - \tan^{-1}\dfrac{v'}{\gamma v}$

然后关于一个"悖论"，S'' 中 y 轴尺长 L. 令 $v' = v$.

$S\to S'\to S''$ 换系看 S 中：

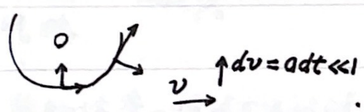


$S\to S''$ 直接合成总速度，需要一个托马斯转角 β.



再投影尺缩，与另法相同。

应用：电子自旋



Σ $d\theta = \dfrac{v}{2c^2}adt.$

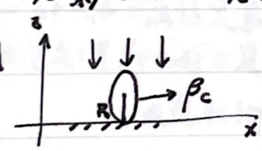
> 光影(2)：光子雨

首先它也可以用"光影(1)"中所述的切界法求解，不过有时切界的寻找和计算很复杂，这时由于雨简单，可以换系。（通常把物体扩至三维，计算明了）

▷ 光子雨通常把淋雨的视为黑体（白体另见），等于在给它增加静质能，同时由于运动还会受到作用力。
（换系不变！）

总之抓住雨量，动量和能量(力)。

Ex



R 球体以 βc 运动，光子雨单位面积接收能量为 P（雨量），求

(1) t 时刻阴影解析式

(2) 维持运动需要的力 $\vec{F}$.

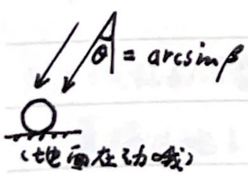
(3) 黑体初始 m_0, β_0，撤去 $\hat{x}$ 向力，求解运动。

$\Delta t = \gamma\Delta t'$
$\gamma\Delta s = \Delta s'$ 是确定的

$E' = \gamma E$ 不一定。

可以试试 P' 换到 P：$E = \gamma(E' - \beta^2 E')$.

□ (1) 换系首先算一下雨量． ★ n（光子数）是绝对量（几个就几个嘛）



$E' = \gamma E$

$\Delta t' = \gamma\Delta t$

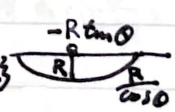
$\gamma\Delta S' = \Delta S$

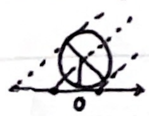
（注意什么在动，什么不在动）x, t'

$\Rightarrow P' = \gamma P$

黑体单位时间接收 $P'\cdot\pi ab$ $= \dfrac{\pi R^2 P}{1-\beta^2}$.

椭圆投影



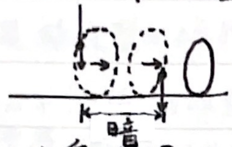


阴影先到 S 系再洛伦兹解析回去。 Σ $\dfrac{(x - \beta c t + \beta R)^2}{R^2} + \dfrac{y^2}{R^2} = 1$.

Date

△ 相对论时空（三）

▷"光影（一）"中地系直接解很麻烦（尤其到了第（2）问），但思路是



切界点位的寻找：刚好切过

（2） 力也由变换得到 $\quad \frac{\pi R^2\rho}{(1-\beta^2)c} \qquad F_x = \frac{\pi R^2\rho\beta}{(1-\beta^2)c}$

接触点 $\vec{u}=0$. $\quad F_x = F_x' \quad F_z = F_z'/\gamma \qquad F_z = \frac{\pi R^2\rho}{c}$

（3） 水平动量守恒（S系）⟵ 光子雨重要考虑点…

$$\frac{d\left(\frac{m\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)}{dt}=0 \qquad m\sim\beta 有 \quad \frac{m_0\beta_0}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{m\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

积分

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta_0}=\frac{\pi R^2\rho\sqrt{1-\beta_0^2}}{m_0c^2\beta_0}t. \qquad \frac{dm}{dt}=\frac{\pi R^2\rho}{(1-\beta^2)c^2}\cdot\frac{1}{\gamma} \quad (\gamma dt'=dt)$$

其它运动易轻略.

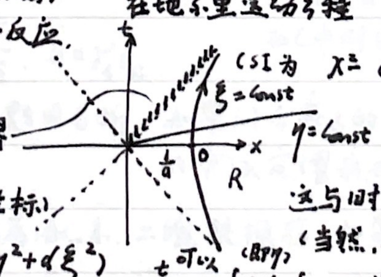
> 加速运动： 当物体受一恒力F运动时，在随动系（瞬时静止惯性系）中加速度为恒量

牛二 $F=\frac{ma}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$（注意！仅x向）. $v=0$ 时 $a=\frac{F}{m}$. 这种运动也称作伦德勒观测者. 可以通过 $a_0=\frac{\dot{v}}{(1-\frac{v^2}{c^2})^3}$ 积.

但牛二这个式子不应该是第一反应，动量定理 $\vec{F}t=\Delta\vec{p}$ 才是.

在地系里运动方程 $x^2-t^2=\frac{1}{a^2}$ （c=1 单位制）

（SI为 $x^2-c^2t^2=\frac{c^4}{a^2}$） 这个式子x经过坐标平移.



是一个以光速为渐近线的双曲线.

伦德勒坐标（双曲坐标）

$$ds^2=\pm e^{2a\xi}(-d\eta^2+d\xi^2)$$

这与时空图里的校准曲线（双曲线 e=1）相同.（当然，可以从伦德勒坐标理解）

R区（其余自行调整）
$$\begin{cases} t=\frac{1}{a}e^{a\xi}\operatorname{sh}\eta \\ x=\frac{1}{a}e^{a\xi}\operatorname{ch}\eta \end{cases}$$

可以 $\frac{t}{x}=v$，（即η）$\int dt'=\int\sqrt{1-v^2}\,dt=\int\frac{dt}{\sqrt{1+a^2t^2}}$ 推.

可得，ξ=Const 运动的测量加速度为 $ae^{-a\xi}$.

在等η（伦德勒系里观测）时，时空线长（距离）$=\frac{1}{a}(e^{a\xi_2}-e^{a\xi_1})$

举个例子：以 a_1 运动的A发现与它同时开始运动的B始终距它L，求B加速度 a_2.

□ 可以取 $t=0$（$\eta=0$）分析，也可直接通取 η=Const

$$\frac{1}{a_1}(e^{a\xi}-1)=L$$

$$a_2=a_1e^{-a\xi}=\frac{a_1}{1+a_1L}.$$

（SI为 $a_2=\frac{a_1}{1+\frac{a_1L}{c^2}}$）

▷ 一般乱七八糟的变速运动，求飞船系里时间可以找直接从地系积分 $t'=\int_0^t\sqrt{1-\frac{v_{(t)}^2}{c^2}}\,dt$.

△ 相对论碰撞(一)

我们描述一个相对论粒子碰撞的题目如 $1+\gamma\to1$, $2_0\to2$, $1_0+\gamma\to1+\gamma$ 等.

> I. 一种是确定型的碰撞. 如一维, 二维给定角度时. 可以用直接列. 解出 E.p.

但化简上不熟练, 可以使用四维矢量. 通常带γ时 IP法可以更快.

$\mathbb{P}_1+\mathbb{P}_2=\mathbb{P}_3+\mathbb{P}_4$

$(\mathbb{P}_1+\mathbb{P}_2-\mathbb{P}_3)^2=\mathbb{P}_4^2$

展开,达到效果相同 (一次消元)

$\mathbb{P}=\begin{pmatrix}E/c\\p_x\\p_y\\p_z\end{pmatrix}$ $|\mathbb{P}|=-m_0^2c^2$ 点乘时首项取负

$\mathbb{P}^2$是不变量, 等式两边可取不同系(如C)

注意有一种共振吸收. 跃迁的E_0以$\frac{E_0}{c^2}$体现(加在)静质量里.

还有一种理论上是二维分析. 但是求阈. 可以直接使用阈结论:

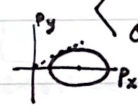
光子列记为静质量$m=0$. 阈下P.E→0.

i) $2_0\to2$. $T_{min}\to$ 产物共速 (C中无速)

$1_0\to N$. $E_{k1max}\to 2\sim N$共速

ii) $1\to2$, $E_{max}/E_{min}\to$ 同向/反向产生

$\theta_{max}/\theta_{min}\to$ C中 0和π/$-\frac{\pi}{2}$和$\frac{\pi}{2}$产生



如果利用阈结论. 即能直接列, 又好用C系.
(如i)) (如ii)中θ_{min})

▷注意! 有可能π产生的粒子仍往前, $\theta_{min}=0$, 需要$\frac{d}{d\theta}$导解出极值点...max.

> II. 取系异常重要. 其中最主要的是C系. 在2→2且是范围求解时特别实用.

首先牢记能动量变换 $\begin{cases}E'=\gamma(E-\beta p_x c)\\ p_x'c=\gamma(p_xc-\beta E)\end{cases}$

θ' — 注意θ'~θ

有个要关注的就是靶粒子静止. 与射入粒子在C中对称. $v_c=v'$.

其次提出质心系. $\beta_c=\frac{\sum pc}{\sum E}$. $E=\gamma_c E_c$

接下来就前后状态看题目分析. 如果问后来2的夹角 φ, 可以利用地系里p守恒的余弦定理表示. 然后再用C中θ'表达$p_{(\theta')}$.

光子一般不麻烦, 不推荐用C系. 二维较推荐. 如果IP法麻烦(没消掉), 那么直接列多半也不简单. 这时试试C.

运动粒子的分裂 用取系(U)动化静.

> 喷射: 不要总是刻意回避v(β). 尤其是有速度条件(如同速)时.

静质损完全可以避开. 举个例子 $\begin{cases}\frac{5}{3}m_0c^2-\Delta E=m_1c^2\\ \frac{5}{3}m_0\cdot0.8c-\frac{\Delta E}{c}=m_1v\end{cases}$ (没动质量!)

□ $dE'=wdt'$ 以w定流量(己系) 喷射可以换至同一系里考察(S系). 计算微元过程, 灵活换元.

题中的有机量(E.p.v...)都也许可以充当积者. 但首先应想p.E守恒(整体), 最后再想微元.

> 辐散: 粒子在二/三维己系中等概率向四周飞散. $dN=P_{(\theta)}\cdot Nd\theta=\frac{N}{2\pi}d\theta'$

光 $\frac{\sin\theta'd\theta'}{\sin\theta d\theta}=\frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2}=\frac{(1+\beta\cos\theta')^2}{1-\beta^2}$ ($d\cos\theta=\sin\theta d\theta$!) $P_{(\theta)}=\frac{1}{2\pi}\frac{d\theta'}{d\theta}$ (二维)

粒子 $p_x=\gamma(p_x'+\frac{\beta}{c}E')$, $p_y=p_y'$ $\tan\theta$ 得 $\theta_{(\theta')}$, 再导

另: 微分散射截面 $\sigma_{(\theta)}=\frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|=\left(\frac{a}{4}\right)^2\frac{1}{\sin^4\frac{\theta_c}{2}}$ $\left(a=\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0E_{c\lambda}}\right)$
(大概可以用经典E_k)

若$\sigma_c\leftrightarrow\sigma_L$换系时抓住粒子数守恒: $\sigma_c\sin\theta_c d\theta_c=\sigma_L\sin\theta_L d\theta_L$.

△ 相对论碰撞(2)

选个展示题目(check). * 核子静能 1k~nk MeV, 若动能 $<\times 10^{-1}$ MeV, 可以用经典 $\frac{1}{2}mv^2$, 但有可观误差!

Ex P法 康普顿散射 ⇒ $\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta)$ 逆康普顿散射 E_e E_γ E_γ' E_{e0}

Ex C法 $z_0 \to z$: T2 C2 散射光子的 $E'_{\gamma\,max}$ ⇒ $= \frac{E_e E_\gamma}{E_e + E_\gamma - \sqrt{E_e^2 + E_\gamma^2 - E_{e0}^2}}$

$p + p \to \pi^+ + D$ 高能质子撞击质子产生 π 介子和氘核.

$m_p = 938\ \mathrm{MeV}/c^2$ $m_\pi = 140\ \mathrm{MeV}/c^2$ $m_D = 1874\ \mathrm{MeV}/c^2$

(1) S系中质子动能阈值 T_{min}. (2) 现质子以 $2T_{min}$ 动能入射. 假定反应局限于平面内. 在C系中各向同性的产生. 求S系中入射方向上单位角度产生 π^+ 介子的概率.

⇒ (1) $T_{min} = \left[\frac{(m_\pi + m_D)^2}{2m_p} - 2m_p\right]c^2 = 286.2\ \mathrm{MeV}$ (2) $P_{(\theta)} = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta'}{d\theta} = \frac{1}{2\pi}\frac{\gamma_c^2\left(\cos\theta' + \frac{\beta_c E_\pi'}{p'c}\right)^2 + \sin^2\theta'}{\gamma_c\left(1 + \frac{\beta_c E_\pi'}{p'c}\cos\theta'\right)}$

$\theta' \to 0.\ \theta \to 0.$ $P_{(0)} = 0.286$

> 光压: 动量流密度 $p = \frac{S}{c}$ Ex 求总压力 $\langle$ 全反 全收 ⇒ 都为 $\frac{\pi r^2 S}{c}$. Ex 光帆飞船 见"考试知识小点(五)"

还有一种是确定的光源与光压. 其动量的意义更为明显. 如 P v_0 求 $x_{(t)}$, 可以有动量守恒 $mv_0 = mv + \Delta P_光$ 部分光场的动量. ($(P = S\cdot 4\pi r^2)_{m.R}$ $x\cos\theta$) 球壳 (各处光压+多亦可)

> 光场常见: ▷ 应运而生: 收光 静质量会变! 应追寻运动中的守恒量; 收光注意多普勒! c v

☆ 不过还要注意, 下分☆中 P_0 是换系的变换. 有时候需要始终在S中观察, 如接收到的光强 $I_{(P)}$ 需多普勒(经典, 为乘 $1-\beta$ 或 $1+\beta$. ($(c-v)dt' = c\,dt$ 或时空图(略)) (即不改 ν_0 和 dt)

☆ "雨"的变换见"相对论时空(2)△"

☆ 注意有一种点是光源功率 P_0 运动时不仅频率 ν 有压缩. 量上也有压缩. 即如

$P_0 = n_0 h\nu_0$, $n_0 \to n_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$. $\nu_0 \to \nu_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$. 总之是 $1+\beta$ 与 $1-\beta$ 的比较值. 收发都适用的.

又如求光强角分布: ① $d\Omega \sim d\Omega'$ ② $dt \sim dt'$ (钟慢) $(\theta \sim \theta')$ ③ $\nu \sim \nu'$ (光的多) $\left\{\begin{array}{l} dt = \gamma dt' \\ n = \frac{1}{(c-v)dt} \end{array}\right.$ $n' = \frac{1}{c\,dt'}$ (或"多普勒 + 钟慢"理解)(推荐) (或时空图理解)

☆ "光脉冲" → 没有钟慢; 只考虑波源 ν. 没有静止向接收者看或收 → 没有多普勒

▷ $F_x=F_x'$ 充要条件是 $\vec F\cdot\vec u=F_x u_x$，即至少一个沿 v 向。

△ 相对论：广泛(一) ⌐瞬惯里有 $\frac{dp'}{dt'}=Ma$． （垂直时 $F_y=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}a_y$）

> 动力学：牛二 $\vec F=\frac{d\vec p}{dt}$． 一维展开有 $F=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{dv}{dt}\cdot\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{m_0 a}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$ $=\gamma^3\beta d\beta$

求导关系 $\frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\sim\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\sim-c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ （或直接记 $d\gamma=\frac{v\,dv}{c^2}\gamma^3$）

不过非常不建议使用微元过程积分，除非是什么题给特定运动。多用一次积分{能量定理、动量定理}

抓 P.E. dp. dE. 不要绕在 m, v 上，m 在设变很容易出差错。

《《国培》》里有一个模型：光子火箭 $dp'=-\frac{dE'}{c}=-c\,dM$． 功率请用定义式 $\frac{\Delta E}{\Delta t}$ 做。$(=-c^2\frac{dM}{dt})$

由于固定光速，一次积分(P.E)就可以解得关系：$\frac{Mv}{M_0}=\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$ （设喷光 E_1）

更一般的考虑相对论火箭：$(dM<0)$

$$(\gamma+d\gamma)(M+dM)c^2=\gamma Mc^2-(-dM)\gamma_{u'}c^2$$

$$(\gamma+d\gamma)(M+dM)(v+dv)=\gamma Mv-u'(-dM)\gamma_{u'}$$

▷ 提示：有时设 γ，积作一个元是很方便的！

$\Rightarrow$ $\gamma_{u'}$ 可消，代入 $d\gamma=\gamma^3\frac{v}{c^2}dv$，$u'=\frac{-u+v}{1-\frac{uv}{c^2}}$ 得

* 相对论二体裂开 没有 $\frac{p_1}{p_2}=\frac{m_{20}}{m_{10}}$！老实一点列 E.P.

(0初f末)

$$-2\frac{u}{c}\ln M\Big|_0^f=\ln\frac{c+v}{c-v}\Big|_0^f$$

在 $v\ll c$ 下，$\ln\frac{c+v}{c-v}$ 一阶打开成为 $-u\ln M\Big|_0^f=v\Big|_0^f$ 即齐奥尔科夫斯基公式。

令 $u=c$ 为光子火箭公式。

若反向喷(减速)，将 u 反号即可。

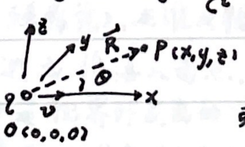
> 电磁场：

$$\begin{cases}E_x'=E_x\\E_y'=\gamma(E_y-vB_z)\\E_z'=\gamma(E_z+vB_y)\end{cases}\qquad\begin{cases}B_x'=B_x\\B_y'=\gamma(B_y+\frac{v}{c^2}E_z)\\B_z'=\gamma(B_z-\frac{v}{c^2}E_y)\end{cases}$$

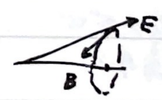
可用两点电荷力变换导得。

运动点电荷产生的电磁场：

$$\vec E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R^2}\cdot\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\cdot\hat R$$



$\vec B=\frac{1}{c^2}\vec v\times\vec E$



其中 θ 为 $\vec R$, $\vec v$ 夹角。 $\theta\to\frac{\pi}{2}$ 处 E.B 更集中

或 $\vec B=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{q}{R^2}\cdot\frac{(1-\beta^2)\sin\theta}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\cdot\hat e$ $(\hat v\times\hat R)$

> 介质中的光：相对介质会，对地再相对论换速。

* 推导：相差 φ 不变有 $\varphi=k_x x+k_y y+k_z z-\omega t$ ←(x,t) 用 (x',t') 代

▷ ω, k 变换 $\omega'=\gamma(\omega-vk_x)$，$k_x'=\gamma(k_x-\frac{v}{c^2}\omega)$

与 E.p 一致，但介质里 $\omega=k\frac{c}{n}$，而平时正常用的 $\gamma\sim\gamma'$ 变换，自动代入了 $E=pc$，但此处应改为 $E=p\frac{c}{n}$ 也可。

举个例子：$\rightsquigarrow f_0$ $\boxed{n}\xrightarrow{\beta c}$ 求介质里 f'。(地系看)

① 介质系里，$\rightsquigarrow f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ = 介质里频率，换回去注意 $v=\gamma(v'+\beta n v')$

$f'=f_0\frac{1+\beta n}{1+\beta}$． ② 波数守恒 $\frac{c-\beta c}{\lambda_0}=\frac{u-\beta c}{\lambda'}$，$u=\frac{\frac{1}{n}+\beta}{1+\frac{1}{n}\beta}c$，再 $c=\lambda_0 f_0$，$u=\lambda' f'$ 得到。

(亦可作为 ωk 变换推导)

▽ 黑洞

真空史瓦西线元 $ds^2 = -(1-\frac{2M}{r})dt^2 + \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}dr^2 + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$
(取c=1, G=1)

史瓦西坐标下，对应有两个奇点 $r=0$, $r=2M$. $r=0$为真奇性，$r=2M$为坐标奇性。通过变换可以消除。 $r_s=2M$ (国际制 $\frac{2GM}{c^2}$) 称事件视界。

注意广相里光子的坐标速度意义不大，与c也不一定什么关系。定义就为类光曲线 $ds=0$，解得光的运动路径。

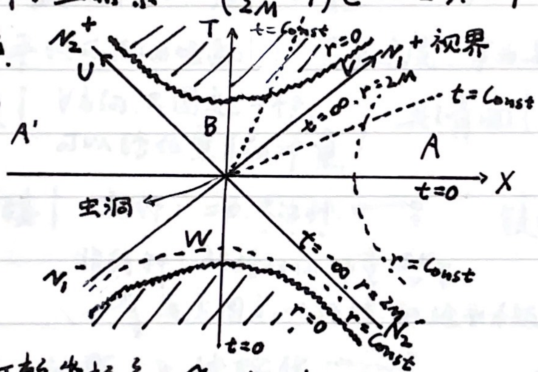
还有一个"时间"的概念。如史瓦西时空中坐标时t相同点可能固有时τ不同。固有时是最有实在的物理意义的，其它坐标时都是一种描述，类似芝诺钟。史瓦西看来 $t\to\infty$ 无限靠近视界，但这并不代表"永远"。在固有时里就是一个有限值。又不过(无穷远)史瓦西坐标不能描述 $\leq 2M$ 的行为。需要变换消除和延拓来考察。

克鲁斯卡尔坐标系 $(\frac{r}{2M}-1)e^{\frac{r}{2M}} = X^2-T^2$.

$$\begin{cases} X = \pm\sqrt{\pm(\frac{r}{2M}-1)}\, e^{\frac{r}{4M}}\, sh\frac{t}{4M} \\ T = \pm\sqrt{\pm(\frac{r}{2M}-1)}\, e^{\frac{r}{4M}}\, ch\frac{t}{4M} \end{cases}$$

$ds^2 = \frac{32M^3}{r}e^{-\frac{r}{2M}}(-dT^2+dX^2)$

类光曲线得 ±45° 斜直线



推导：忽略角向θ.φ. 令乌龟坐标 $r^* = r+2M\ln|\frac{r}{2M}-1|$

(A区) $V = e^{\frac{r^*+t}{4M}}$ $U = -e^{\frac{r^*-t}{4M}}$

$T=\frac{V+U}{2}$, $X = \frac{V-U}{2}$ $(ds^2 = (1-\frac{2M}{r})(-dt^2+dr^{*2}))$

有 $t = 2M\ln\frac{V}{|U|}$.

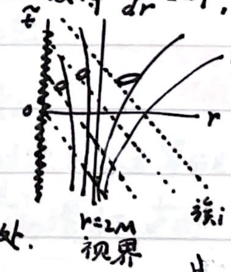
B.W区中"时空角色互换"。$-r$可视为坐标时间。(即史瓦西延拓时空是非静态的)

内向爱丁顿坐标系 $\tilde{t} = t+r^*-r = t+2M\ln|\frac{r}{2M}-1|$.

$$ds^2 = -(1-\frac{2M}{r})d\tilde{t}^2 + \frac{4M}{r}d\tilde{t}dr + (1+\frac{2M}{r})dr^2$$

类光曲线得 $\frac{d\tilde t}{dr}=-1$, $\frac{d\tilde t}{dr} = \frac{r+2M}{r-2M}$.

简要描述：探险者若在视界前开动发动机制止下落，仍可返回。一旦走至视界(并无特殊感觉)，光锥反转，他无法再向外界传送信息，更无法逃出，终落入奇点。而在外部观者看来，收到的永远都是视界外发出的光，会感觉探险者越走越慢，仿佛逐渐"冻结"在视界处。

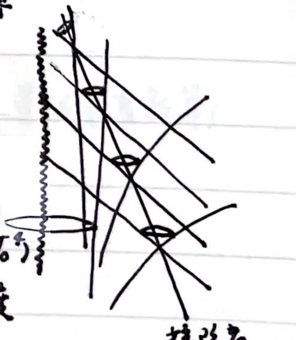


"○"为光锥(未来)

附：史瓦西坐标只有四区中的一个，爱丁顿坐标能覆盖AB二区。

> 史瓦西黑洞熵 $S=\frac{4\pi kG}{\hbar c}M^2$. 温度 $T=\frac{\hbar c^3}{8\pi kGM} \propto \frac{1}{M}$.

直接与其质量相联系，其通过热辐射 $P=4\pi r_s^2\cdot\sigma(T^4-T_0^4)$ 蒸发能量(可能稳定) 宇宙背景温度



□ 蔡题刷题班

009

- 扭矩图　　浸渐 $A^2\omega=const$ 例8
- "偶极"⟷"梯度" $\varphi_4=-(\nabla\varphi_2)\cdot\vec{l}$　$\varphi_2=-(\nabla\varphi)\cdot\vec{l}$　$\varphi=\frac{kq}{r}$

这种方法比较快.

- 质量的单位是 MeV/c^2 注意这个巨大的量级

061 偏振鬼影 E_y E_x $\delta+\frac{\pi}{2}$叠加　磁荷解电流 / 电流线正和解　黑洞广相

▷ 注意绳速带动力差. 影响T. 应直接在惯量中 $J=\cdots+mr^2$.

▷ 天体间的换系. 要求大小,亦需方向　大小的宗旨原理一直都在.

题目会说: 假设位于Ⓔ公转速度正前方…
这样可以确定夹角.

010 水波 $\frac{2\pi}{\lambda}$ $\omega A\frac{2\pi}{\lambda}$　潮汐锁定 L守恒 Ⓔ+M

062 扩散 (输运过程) $\frac{dN}{Sdt}=D\cdot\frac{dn}{dx}$ $(D\cdot\nabla n)$　电势展开　变元概率分布

- 冲击水平但可能(由地面)给有竖直速度. 常为异形 因 I_N 而不得不让 $\vec{v}$ 抬升.

▷ 连接: 铰 | ∀方向. 只固定了一个点. 可以给任意方向冲量)　光滑面 | 只有⊥面的冲量. 接触点只有∥速度　固定 | 可以提供冲量. 冲量矩.

(光滑面"类似"八方)

视为多点受力.

杆接 | 轻杆: 二力. 只沿杆.　铰接 | 无法传递力矩. 但可以在碰撞时传递(任意方向的)力和冲量.

非轻杆: 能给切向冲量

(角度固定: 一个物体. 能给予力矩)

011 平面n问题　传输线

▷ 注意拍频是和差化积后的两倍. $2\cos\frac{k_1+k_2}{2}x\cos\frac{k_1-k_2}{2}x$ 空间周期是 $\frac{2\pi}{k_1-k_2}$.

- "留存部分列方程" × 最后右边剩下部分仍为绝热.
~~不要使用.~~
最稳的还是 ~~微元过程积分~~ (dn 带去能量)

此部分存疑. 可能还是留存部分列稳.

▷ 辐散中心"一中心对称中心": 四根⊥E. 无电动势. 而六边等分E.

等压

063 场线方程　天体电磁场　(无电流) 磁场滑杆

- 车有两轮. $f=\mu mg$ 需平分. 且切向 $f_t=ma$ 只有主动轮产生.

▷ 互动轨道构想是一种"碰撞". 没有 L_z 保持不变. 需要地系能量动量重新算!

注意: 物点均匀发光不代表像点均匀收光. 题目若问亮度: 就是原本一倍　"题目常说"连续光滑小圆弧"" 但仍守恒

▷ 光阑若简单不必作物像与光瞳. 建议直接画边界光线分析.

012 光影　抛刀包络

- 带反射镜的多普勒 (高速多普勒) 最好作出反射像.

□ 考试总结小点(一)

1 CPHO-5

- 摩擦碰撞要讨论 t_c 与 t_f 即 μ 时，不必列整体动量、角动量，细分 I_N、I_f，即列冲量定理

  再将条件代之 $\begin{cases} \mu I_N = I_f \\ \omega_1 r_1 = -v_c + \omega_2 r_2 \ldots \end{cases}$ 不要使用，令两解相等得到 μ 条件。（见"刚体Δ"） ~~（见"Δ考试讨论"）~~

- 三极管、晶体管自身存在分压，不要忘其支路过。V_{ce}
- $\sum_{i=1}^{n}$ $n<0$ 为反向耦合，注意判断和讨论是否有情况存在。
- $dS = \frac{dQ}{T}$，Q 与 Mc^2 相关。使用需假构过程 T 不变，注入能量。

  背景辐射注入 $S \cdot 6 T_0^4$.

2 CPHO-S2

- 外界做功不要考虑轴如何输入，反正就是动能变化（见"刚体运动学……Δ"）
- 取平均要谨慎：$\overline{\Delta v}=0$ 不代表 $\overline{\Delta v^2}=0$、离心势能 $(\propto r^2)$、回面惯量不要等效在质心 $(\propto r)$ 等等。
- 近似要谨慎！：$\frac{0+\frac{0.2'\Delta}{0.1'}}{0.1'}$ 多分数要注意，尤是分子分母消去一个小量时务必检查展阶数，

  $\frac{0.2'\Delta}{0.1'}$、$\frac{0.2'}{0.2'\Delta}$ 注意分配律导致的 $0.2'$ 和普通的 $1 \cdot 1'$ 形都得到 $32'$.

- $\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$ 中的 μ 注意要代 kg/mol！正常应该速度在百米量级的！
- 立体角占比就是 $\frac{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{4\pi}$，不要二三维混乱思考。

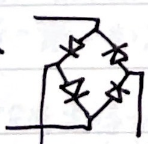
3 2021.5 振源析

虚部：衰减。

- 折射率、电导率等等都可以复数（金属、等离子），凡是振荡先用复数解，再不济最后也是取模。
- 带值的复数解题（如交流电）可以用 Casio 复数模式直接化 $r\angle\theta$ 形（反映相移信息），包括输入也可以。
- 模型积累：$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$ 模拟 $n=\sqrt{\varepsilon_r}$ 行为 $\leftarrow I=S\cdot\frac{dD}{dt} \Rightarrow D=\varepsilon_r\varepsilon_0 E$，$\varepsilon_r=\ldots$
- 不要随意 $\frac{d}{ds}$ 电磁场的换系，如果是非相对论的话与地系直接做差别不大。

4 CPHO-S4

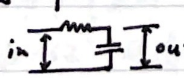
- 整流电路



注意二极管正向导通电压就是导通压降（示波）

在稳态且 $R \gg \frac{1}{\omega C}$ 时 $U_{out}=\overline{U_{in}}$（直流成分）（即ω滤去）

RC滤波电路



（或者，$RC \gg \frac{1}{\omega}$，相当于电容 Q 基本不变，无交流性）

11 XPHO-5

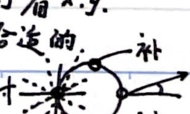
> 求转角 θ 时的速度：$p\frac{d\theta}{dt}=F_\perp$（如洛伦兹力 qvB），$\frac{dp}{dt}=-F_\parallel$（如阻力 $-kv$）$\Rightarrow \frac{dp}{p}=-\frac{F_\parallel}{F_\perp}d\theta$ 积分。
（解析型运动题）

此类题很容易被列的物表微分式给卷进去，要保持宏观清醒的思维。

灵活求和 ⟵ 尤其是涉及到转角时，不要只盯着 x、y。

通常都是洛伦兹力，取 $F_\perp$ 是很合适的。

- 四补问题 $\begin{cases} \text{计一凑二（定1，对另一个讨论找 } p\theta\text{）} \\ \text{二分定则（一定是对补的，} \xrightarrow{\text{乘}} \text{对补 } F\text{，对补 } M\text{.} \\ \text{取出一般态。（若为持续性，最好抓中间某态补而非正异的初态等）} \end{cases}$



□ 考试总结小点、(2)

5 孩联考

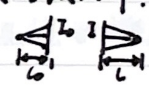
- 碰撞题中若问什么(恰好)没有作用力，不要忘记打击中心 $\frac{2}{3}l$.
- 相对论里光线夹角 θ，有 $\cos\theta$、$\sin\theta$ 什么的尽量用变换写，不要什么 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ 然后就不敢干了
- 做合理近似，尤其是大型生活化模型时。何谓合理？近似出来解做检验。如我忽略了船倾角，最后再检验倾角，"题要求两位有效数字"可以。但注意近似不是忽略，你令 $\alpha=0$ 去解就不对了，当然都摆成水平去解。
  (这个影响可不可观就不能估计了)
- 热—涉及粒子流，不一定都要微元过程，直接列能量守恒多半都可解。

6 2021.5 娘源杯(补)

- 几何光学光阑题，只需要清晰的草稿就可以了。注意，光强是单位面积上的光量，可能要除以光斑半径^2。既可以逐步算，也可以利用物像亮度不变的结论：(这里I指光强)

$$B_1=B_2 \Rightarrow \frac{I_0\cdot l_0^2\theta_0^2}{S_0\cdot\pi\theta_0^2}=\frac{I\cdot l^2\theta^2}{S\cdot\pi\theta^2} \Rightarrow I=\frac{l_0^2}{l^2}\cdot V^2 I_0$$

其中 V 为横向放大率。

如果还要算光斑半径，反正要逐步，这种方法也不见得优势。 l、l_0 为  观察斑距物/像。

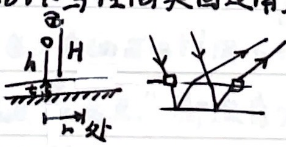
- 天体里火箭喷射要读题，基本上应该是指连续性的动量定理，结论直接记 $\Delta v=u\ln\frac{m}{m'}$。$u$ 是相对喷速，至于正负号自判即可。

  另一个结论是近远地点转换：$v_2=\frac{2GM}{r_1v_1}-v_1$。 

- 解析型极坐标型运动题(以 $r=Ae^{\gamma\theta}$ 为例)已知轨道的，直接求导 $\begin{cases} a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases}$ 列出。由 F_r、F_θ 可直接解出 $\dot{\theta}^2$ 和 $\ddot{\theta}$ 的双元方程组，F_r、F_θ 本身也能化成 $F_r(\theta)$、$F_\theta(\theta)$，便可直接解出 γ。即力的性质决定了螺线的特性指数。不过这也需要合适的初态进入(速度总与径向夹 $\tan=\gamma$)

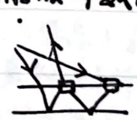
  对数螺线结论：若力始终与径向夹固定角且为 $\propto r^k$ 力，则可能成对数螺线。

- .. 模型积累：散斑干涉
  (一折一散(一反))



$2nt(\cos\alpha-\cos\beta)$

$\Rightarrow \frac{t}{n}r^2\left(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{H^2}\right)$



$\Rightarrow \frac{t}{n}r^2\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{H}\right)^2$

7 CPHO-S3

(一) 地面上的冲击：I_f 在没有支持力冲量时，就没有摩擦力冲量。("μ足够大"也不一定代表有)

注意支点大多会滑，纯滚(不滑)有条件。

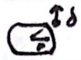
可以比对一下"刷题班 062"，理清一下思路：对质心而言，物体应该转起来。

但物体的形态即接触点决定了质心应如何运动(方向)。接触点(即旋转支点)如果在质心正下方，质心没有竖直速度，也不会有竖直冲量 I_N。而如六芒形，则存在 I_N、I_f，给定 μ，就变成了"某一条件"题。

□ 考试总结小点(三)

· 气泡肥皂泡 水膜 表面张力附加压强极可能是 $\frac{4\sigma}{r}$. 注意看看是液滴还是泡上一层膜.

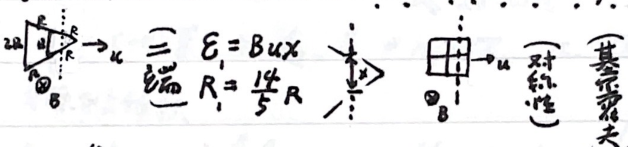
· 考试遇到 $(\ )t = (\ )(t+\delta)^2$ 一阶对二阶等情况, 大胆猜大胆略 $(t\sim\delta^2)$

小结论: 球体下压  δ 一阶. 半径改变是二阶.

· 考试题中碰到给出 k_B. 不知何用时想想 { 玻尔兹曼分布? ⟵ 势能? (比如非热一气体题) }

· 极化 { 位移, 取向, 畸变(电子云,可略) } 不同极化产生的效果 $(\vec p \Rightarrow \varepsilon)$ 只需相加.

· 计算吸热时, 算完做功(面积)后不要忘记加内能差!

· 出入磁场  $\Rightarrow \mathcal{E}_1 = Bux$, 端 $R_1 = \frac{14}{5}R$ 对称性 基尔霍夫

· 引力压强(星体中) P有 $\frac{dp}{dr} = -\rho g$. g为引力场强 $= \frac{GM}{R^3}r$. 注意体会这里压强的概念.

8 拔尖 2019.11

> 地面上的冲击(2): 总结一下, 当未冲击过质心线上时且接触点不在质心正下方时, 存在 I_N.

理解上, 冲击当作一个力的话, 若物体平衡需要 N, 则会存在 I_N.

还有一个例子:  杆会抬起. (足够大的粗糙地面)

这个实际上应为在短时间冲击完后, 整个的水平移动速度会导致f产生. f的作用会(满足一定条件下)使之向上翻转.

· 凡是"匀强磁场…"(尤其是解析运动的题, 留应有能量守恒/不做功. 即使相对论性也有 γ, v 不变(没有E即V时)

小结论: 电偶极子场 在r方向可以利用 $E=\text{Const}$ 和径向中一直接解析出来 $r(t)$ (包括解析电场题. 不要忘了 $\frac{1}{2}mv^2+q\varphi=\text{Const}$)

· "能够到达、转过" "最近最远点" 都没有必要解出 $r(t)$, $\varphi(t)$ 什么的. 只需要看 $\dot\varphi\sim\varphi$, $\dot r\sim r$ 的式子
→ 能够保持有不为零的 $\dot r$, $\dot\varphi$.

9 博知汇(孟策)

· 喇叭磁场环振, 若产生电动势 $\tilde{\mathcal{E}}$ 是交变的, 则可直接应用 $\tilde Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$

得到 $\tilde I = \frac{\tilde{\mathcal E}}{\tilde Z}$. $F = B_r\cdot 2\pi r I$ ($\propto I$) $\bar F = (\cdots)\cdot\overline{I I_1} = (\cdots)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\tilde I\tilde I_1^*)$. 如环切开一气隙, 相当于回路里一电容.

· 各情况临界过渡:  欠阻尼 $\xrightarrow{\beta\to\omega_0}$ 临界阻尼 $\xleftarrow{\beta\to\omega_0}$ 过阻尼

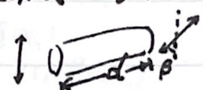
注意应由 x_0, v_0 确定常数 A_1, A_2. $\beta\to\omega_0$ 时 A_1, A_2 也会极端, 需要其参与消解.

□ 考试总结小点（四）

· 矢量分析证明题（常见积分型） i 矢量公式 ii 全微分 $\oint \oiint d(\cdots)$

iii 物理意义 $d\Omega$. ds. ... iv 虚功式 $\delta W = \oint d\vec{F}\cdot\delta\vec{r}$, $\delta\vec{r} = \delta\vec{\theta}\times\vec{r}$ …

$\Rightarrow \delta\vec{\theta}\cdot \bigcirc = \delta\vec{\theta}\cdot$ ②

·· 模型积累：磁致旋光  $\beta = \gamma \cdot Bd$ 维尔德常量 $\gamma = \frac{NZe^3}{2c\varepsilon_0 m^2 n}\frac{\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}$

线偏由左右旋叠和，左右旋相差（$n_+ \neq n_-$）引起偏转.

$$\begin{cases} m\ddot{x} + e\dot{y}B + kx = -eE_x \\ m\ddot{y} - e\dot{x}B + ky = -eE_y \end{cases}$$

令 $z = x+iy \to E_x + iE_y = E_+ e^{i\omega t}$ 左旋

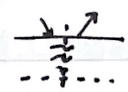
$z = x-iy \to E_x - iE_y = E_- e^{i\omega t}$ 右旋

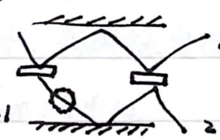
只考察受迫振动项，时间系数 $e^{i\omega t}$.（附加修振） $\Omega = \frac{eB}{m}$. $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. 得

折射率由电极化入手. $z_+ = \frac{-\frac{e}{m}E_+}{\omega_0^2-\omega^2-\omega\Omega}$ $z_- = \frac{-\frac{e}{m}E_-}{\omega_0^2-\omega^2+\omega\Omega}$.

$\vec{P} = ⊘ \cdot (-e)\vec{z} \Rightarrow \chi_e$. $\varepsilon \Rightarrow n_+ = \sqrt{\varepsilon_+}$. $n_- = \sqrt{\varepsilon_-}$. 得到相差.

单原子占体积

古斯-汉森位移  $k\cos\theta \frac{d\phi}{d\theta}$ 全反射相移 /  隐失波透入一定深度 e^{-kz}

光子炸弹  r, t $|r|^2+|t|^2=1$ 1 2

$|r| \neq |t|$ 时 / 不能消光

可让 2 处光程上差一个 π 消光.

则 $|rt|^2$ 为挑出概率. $|t|^2$ 炸了.

重复 ∞ 后 $P = \frac{|r|^2}{1+|r|^2}$

10 猿辅导

> 解析运动方程 / $x.y$ 耦合时 (θ) ：☆ 一次积分不能忘！E. L …

① 洛伦兹式 ⟶ 凑全微分（正则动量…）（以及"洛式振动"）

② 摩擦式 ⟶ 可以设 $v.\theta$ 表示向. 然后 $\dot{v}$ / $v\dot{\theta}$（也可 $(v\cos\theta)$/$(v\sin\theta)$）→ 即自然坐标系［经典：$\vec{F}+\vec{B}$］

③ 相对论式 ⟶ 用 P. E！$(mc^2)^2 = (m_0c^2)^2 + c^2(p_x^2+p_y^2)$

$mc^2 + V_{(x,y)} = E_0$. $\dot{p}_x = \cdots$, $\dot{p}_y = \cdots$ → 若凑不成（即出现带 t 则套 E …（含去 $\dot{t}$ 方程）^{2} (const)

⑤ 有心力场式 $k\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \ddot{x}$ ↓ E.L 守恒

▷ 若求轨道，可以 $\frac{dy}{dx} = \frac{p_y}{p_x}$ $(\frac{\dot{y}}{\dot{x}})$ /$\tan\theta$,

$\frac{dy}{\sin\theta}$. $\frac{dx}{\cos\theta}$ 等 ← $\frac{ds}{d\theta} = \frac{v}{\dot{\theta}}$ 等解出.

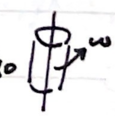
④ 猎狗式 ⟶ $\tan\theta_{(s)} = \frac{dy}{dx}$ 代入 $ds = \sqrt{1+y'^2}dx$

（指 v 不变有 $\frac{ds}{dt}$，而 $\theta_{(t)}$）

· 磁场中存在圆切割时，注意 $\vec{\omega}\times\vec{r}$ 项可能会引起的不均匀分布产生的影响（不管研究整体质心时没有）. 例如： $B \times$  $I_大$ $I_小$ 安培力存在力矩！影响转动.

· 换转系研究 $\vec{L}$ 时，注意存在"惯性矩" $-\vec{\omega}\times\vec{L}$，以维持 $\vec{\omega}$ 转动.

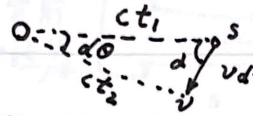
· 碰撞解的互易（题述"…回到初态 v_0"）$x_A \rightleftharpoons x_B$.

· 速度 v 生电而生磁的，$B \ll E$（$c \gg v$ 时），可略去 B 的结性影响. 如  ω 产生极化，极化主动力可不计 $\vec{v}\times\vec{B}$.

□ 考试点滴小点（五）

> 光帆飞船：在 I 光强下推动加速. i) 地系考察收光要乘之以 $1\pm\beta$. ii) 黑帆：$\frac{IA(1-\beta)}{c^{\,}}$ … $IA(1-\beta) = \frac{d(\gamma m c^2)}{dt}$，$\frac{IA(1-\beta)}{c} = \frac{d(\gamma\beta m c)}{dt} \Rightarrow \gamma m(1-\beta) = Const = m_0$（追寻守恒量） 白帆：静质量不增加. 仅 $\frac{IA(1-\beta)}{c}\left(1+\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) = \frac{d(\gamma\beta m_0 c)}{dt}$.

△地系静止！ △没有 m_0！

· 视超光速：
观察到 S 移动超过光速.

$ct_1 = ct_2 + vdt\cos\alpha$

$dT = dt + t_2 - t_1 = (1-\frac{v\cos\alpha}{c})dt$.

$v_{\theta\,(v,\alpha)} = \frac{vdt\sin\alpha}{dT} = \frac{v\sin\alpha}{c-v\cos\alpha}\cdot c$. 可 $>c$.

12 试题选+节间论

· 解析型运动学题. 若已知轨道并且是"套在/贴着轨道…", 注意存在 N 力, 牛二并不方便. 不如关注 E.L $\Rightarrow$ v 即 $\dot{s}$ 随位置参量的函数, 从而得到 $s_{(t)}$.

· 设 ω 时注意是否 $\omega = -\dot{\theta}$！（比如求 β 时）尽量设的好一点. 类似的还有暂态电路里 $i = -\dot{q}$！

· 求杆. 环对其上物体（通常套着）作用力时, 不要忘记是否有⊥平面的力！如 $F_c = 2mv\omega$.

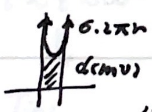
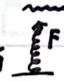
· V 函数里只有 x^2 时, 判断稳定性可以 $\frac{d^2V}{(dx^2)^2}$, 但求振动一定要记得是 $\frac{d^2V}{dx^2}$！所以最好不要那么干. 差不了多少的.

重力. 支持力等.

· 表面势能 $U \Rightarrow \begin{cases} dU = \sigma dS = 8\pi r dr\cdot\sigma & \Delta p = \frac{2\sigma}{r} \\ dU = 4\pi r^2 dr\cdot\Delta p \end{cases}$

· 计算气球浮力：n_0 原平衡, 则 $F = n_0\mu_{空}g$（即无论什么气体. 状态相同 n 都相同）

这种"原物替代"的方法很常见. 再如玻尔兹曼分布的转筒里, 又放入 $N_2 \ll N_1$（分子）的 V 的小球, 其分布由之势能 ← $m_2\omega^2 r - n_1(r) m_1 V\omega^2 r$ 积分, 再玻尔兹曼.

·· 模型积累： 与  冲枝类似, 会绕平衡位置上下振动.
但液体可以向上传递冲击力, 故下行仍是 $\frac{d(mv)}{dt}$, 不以落回0.
考虑粘滞力, 最终耗散 $Q = \sigma\cdot 2\pi r\cdot h_0 - mg\cdot\frac{h_0}{2}$.

· 不要往 Const 身上消变量！

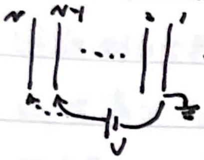
· 内穿简谐：求解出态 ① 设极轴方向 φ, 写出 $v_{x0}(\varphi)$. $v_{y0}(\varphi) \rightarrow v_{xm}. v_{ym}$. 利用如 y 至 max 而 x 至 0 的相位关系（$\sin^{-1}(\ ) = \cos^{-1}(\ )$ 等）② 以初态建 x, y 轴, 写出 $x = \cdots$, $y = \cdots$, 代入 $x^2+y^2=R^2$ 解. ③（题目之前有铺垫的）L.E 算出 r_{min}. v_{max}. 设其方向 φ.

· 一维势能曲线题：① 要先判断的出是一维/二维势曲题. 写出 $\varphi_{(x)}$.（2维可有关系. 35届复磁附）② 大致描绘图样, 可能借助于 φ' 即 F. ③ "能否越过"题即考察峰顶 φ_m. 有时可能绘图（即写 φ/F）麻烦. 但可以直观判断出平衡点, 写出其 φ_m. 运动范围即拉线. ④ 振动. "φ".

□ 考试总结小点（六）

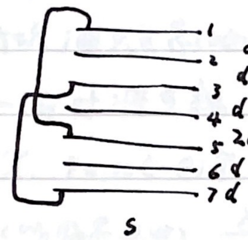
· 极板相关：I. 分析各表面电量/受力 ⟶ 不复杂时直接设 $+\sigma_1, -\sigma_1, +\sigma_2, -\sigma_2 \cdots$ 解.

II. 有时问题等可以引入"电容视角"，口诀："一块板，两个面，拆开画，连通即节点"。如图



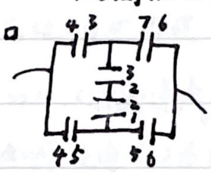
视为 $N, N-1 \cdots$ 个C串联.

左表面受前一号板牵拉着.



(1) 求 4.6间等效电容.

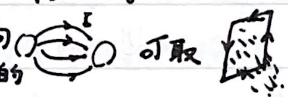
(2) 4.6间加 $-V$，5板受力.



可等效视作R，得 $R_{总} \Rightarrow C = \frac{16}{19}\frac{\varepsilon_0 S}{d}$

基尔霍夫解 $I_1 \sim I_5$，即 $Q_1 \sim Q_5$.

\ 已知I求磁场 { 毕萨. / 环路. ▷挑选技巧：含方向平移延伸的



可取 左右二段相同.

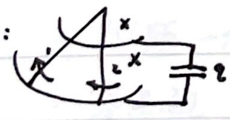
· 因无电阻略去并联部分时，想一想并联支路上是否有电动势？（如感生）

· 多元微分方程组难解，发现需要积分才作代换的，建议把前面做了微分的式子还原回来，用更低阶的量（如q）作主元。总之，线性式做代换，微分方程式用来最终解.

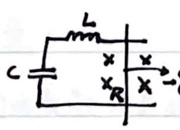
· 不要总是企图先解全程再代末态，尤其是题目没有正面强调 $f(t)$ 时。除非对求解有十足把握，一旦卡壳应当先停手分析末态（如双情况）。因为它很可能是只需做微分微分方程式全过程的一次积分.
↳ 稳态 $\dot{i}=0$ / 循环 $\dot{i}=0$ 之 $\dot{i}=0$

· 较强图景性的麻烦性问题，可以画物理量联系图，帮助理清求解思路，并快速判认一次积分上的关联。▷"12减法"题可能是会消去一些其他量的，自己要留心.

举例：



$\dot{q} \sim i \sim \dot{\omega}$，$\mathcal{E} \sim \omega$，$q$



$\dot{q} \sim i \sim \dot{x}$，$\mathcal{E} \sim \dot{x}$，$q$

★ 相对论时空 Tip:

▷ 两系是否有对齐？{ 有 —— 常见，标事件（定点）S: (x_A, t_A) S': (x'_A, t'_A) 做变换，x/t 缺一不可. A! / 无 —— $\Delta x . \Delta t$ 形式计算；或是需修零点 $\Delta_1 . \Delta_2$；或是属于速度类光多题…

书写时通常有一量侧量，其余都写 β 或直接 β 值即可.

▷"S'里还有动"的，一定注意变换时 $t'_1 \neq t'_2$ 导致的位移差值！列清运动方程 $x'_{(t)} / x_{(t)}$ 等，准备双向变换代入解（如 t'）.

还可以直接 —— 匀速 —— 带a等
换速对地.（注意初始位置！）

▷"从甲看来…"只要两事件不在甲身上发生（或同地），就不要钟慢！只缩用的较频繁.

▷ 时空图的使用条件 { 单维 / 做的时候帮助 / 一旦非直线，无益

▷ 表述：
I."S系测得相对…速度" — "伽利略型的相对" 但也要看是不是有一个系里是不动的！

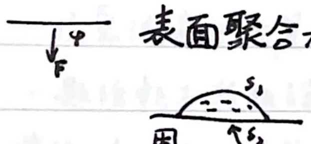
□ 考试总结小点(七)

13 仔发若干

> 再论"介质电子"模型：考察外加E受迫振动产生的复位移。在有阻尼 $-\gamma v$ 时（常为导体，τ碰撞(6)），$\tilde{A}=\frac{E_0}{\bigcirc+i\bigcirc}$，$n=\sqrt{\varepsilon_r}$ 会带虚部，表达出 $e^{i\frac{\omega}{c}n}$ 的衰减；$e^{-i\omega t}$，$e^{i\omega t}$ 的选取无伤大雅，线性一阶项 $i\bigcirc$ 只会影响 n 虚部，在 $e^{i\frac{\omega}{c}n}$ 里又乘回来了，磁场旋转的一阶项在表达 E_x+iE_y 还是 E_x-iE_y 时消互耦一阶项乘回来，也是一样的；辐射等求 $\vec{v}\cdot\vec{v}^*$ 更没有关系了。总之，抓住 $\tilde{A}$。$P=n(-e)\tilde{A}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)E$ 即可，e带负号避免出错。最后一个是常见的近似，如 $\frac{\gamma}{m_e\omega}\ll1$（$\omega_p$ 临界吸收），$\frac{\gamma}{m_e\omega}\gg1$（透射深度）

∴ 模型积累：导体周围（几乎）自由电子受(如感生电场)力加速，在释放后遵循角动量、动量守恒带动(碰撞)整个导体，到能量即有效热损耗。

表面聚合力 ⟶ 向内的力，迅速衰减以至可积为 $\int_0^\infty$，从而产生一表面与内部的能量差，有时补偿后会多出动能，形成压强。
稳定：内部热运动 $\frac{1}{2}kT$ 补偿升至表面的耗能
双表面（两物质交界）：两物都会施力，平衡态在 $(\varphi_1+\varphi_2)_{min}$
└ δF ▷虚构平衡/互易性构造

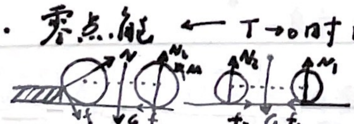


· "N很大…"很可能是求和改为积分（求和多半求不了…）。较特异的衍射积分，$\int e^{ik(\cdots)}$ 老实写即可，通常只能 Casio 积一特定θ处。▷如果要描述合成总振幅（每个为A）即表达出衍射里的那个α，就计入积分元内单元数，如 $\int\frac{N}{2\pi}d\varphi\cdot A\cdot(\cdots)$。当然，亦可先算分布，再由正射时简单（$dI_0$ dA_0）的加和乘上去，如 $\frac{NA}{2}\cdot(\cdots)$。

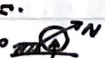
· N匝一定要圈起来注意！

· 零点能 ⟵ T→0时间内度能均分从连续变为分立，$\frac{1}{2}\hbar\omega+n\hbar\omega$，ω为本征频率 ω_0 如 $\sqrt{\frac{k}{m}}$。

> 车：



通常后轮为主动轮，绝有一力矩 M_0，对车整体分析而言，其是内力。前后两轮状态不同 N_1, f_1, N_2, f_2，相应对地面μ有一定要求。

① 能否越过 ⟶ 临界为
▷受力平衡态（$a,\beta\to0$）$\begin{cases}\Sigma F_x=0\\\Sigma F_y=0\\\Sigma M=0\end{cases}$ ⇒ 解 M_0 等，μ_s
但需满足"临界"如  $N_1=0$

有时题设会"由车外的一对力偶施加"那么就是外力矩了。

② 启动加速 ⟶ (已知轮I)
到 a,β，$a=\beta R$
+ 角动量定理（对C或对地（f.N.a参与）接触点都不错） ⇒ 解 μ_s, M_0 等（N_i, f_i）。可能讨论的：
I. 前后轮 μ_s 条件
II. $N_i\geq0$ 前轮不抬起

□ 考试总结小点心

> 连接：杆 { 非轻杆 m.L 一个物体分析。（杆上受拉 也有 F_τ，但因铰接而不存在M）

注意不可压缩：沿杆同速！ 轻杆 { 固定 F_n. $\underbrace{F_\tau.M}$. 视作一整体解 　换为冲量和冲量矩亦同. $I_n.I_\tau.J$

铰接 二力F_n 共存 只沿杆（90°时不再传递）

绳 可认为铰接（端接式，不给M. 故无F_τ. 二力杆）$T>0$.

· 诸如 $a\ll1$ 等条件建议圈起，在研究如 $\cos\varphi$ 的二次函数极值点 $\cos\varphi_0=\frac{1}{2a}$ 应及时舍去，易忘

· "所张角…"为全角！

· 用洛伦兹变换时一定注意是事件！$(x,t)\to(x',t')$ 在 $t=0$ 把 x 变到 x'，一定要再考察一下 t'，尤其是把运动的东西换到另一个运动系里时！

· 注意波表示相差时，请一定沿波写 $\vec{k}\cdot\vec{r}$，不是单个分量 $k_x\cdot x$ 就可以的.

· 题给粒子超极端相对论时（如几GeV的电子），一定要留印有 $v\approx c$. $\gamma\gg1$ 的近似手段（及其它与之相关的如化曲为直等）

> 萨格纳克干涉仪 / 转盘参考系：

① 地系 $2\pi r$. 顺 $1-\omega r$. 逆 $1+\omega r$. 　$t=\frac{2\pi r}{1\pm\omega r}$.

② 转系 $ds^2=-dt^2+dr^2+dz^2+r^2d\varphi^2$（柱坐）$\xrightarrow{\varphi=\varphi+\omega t}$ $ds^2=-(1-\omega^2r^2)dt^2+dr^2+dz^2+r^2d\varphi^2+2\omega r^2d\varphi dt$

可见光令 $ds^2=0$ 得 $\frac{d\varphi}{dt}=\pm\frac{1}{r}-\omega$. 本征时 $-d\tau^2=-(1-\omega^2r^2)dt^2$ 即 $d\tau=\frac{dt}{\gamma}$.

$\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{\frac{1}{r}-\omega}{\sqrt{1-\omega^2r^2}}\Big/\frac{-(\frac{1}{r}+\omega)}{\sqrt{1-\omega^2r^2}}$. 　转盘本征长度 $\int dl \xrightarrow{\cdots} \frac{2\pi r}{\sqrt{1-\omega^2r^2}}$. 光在此系中坐标(线)速度为 $\Longrightarrow \frac{1-\omega r}{1-\omega^2r^2}\Big/\frac{-(1+\omega r)}{1-\omega^2r^2}$

（…涉及时空几何，略）

可得到与①相同的用时.

光程差即为 $\frac{2\pi}{\lambda_0}c(t_+-t_-)$ ，亦可引入等效折射率理解：若是37届那样带个n，就依它的.

（λ_0 一真空） 　用①把1改为 $\frac{\frac{c}{n}+\omega r}{1+\frac{\omega r}{nc}}\Big/\frac{\frac{c}{n}-\omega r}{1-\frac{\omega r}{n}}$ 得 $t_+.t_-$.

· 相对论碰撞（物块型）：前后若粘在一起，静质量变化可用 $E_{n+1}^2-E_n^2=M_{n+1}^2c^4-M_n^2c^4$

▷忘了利用静质量的物理意义！

受恒力F作用时：① $v=\frac{pc^2}{E}$（$pE=pc^2$）用p.E的视角考察. 常见手段：$F=\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\Rightarrow FEdx=pdpc^2$（绕开t）

（不推荐）② 伦德勒结论. 速度为v时，其在标准形下点为 $\begin{cases}x=\frac{\gamma}{a}\\ t=\frac{\gamma\beta}{a}\end{cases}$.

· 常见"瞬变造成积累突变"的：I. 快速增大/减小磁场，其感生电场对电荷冲量为一值 $I=\frac{Bqr}{2}$

II.

▷理解 $\begin{cases}W=\Delta E_k+Q\\ W=v_0J=v_0\Delta p\end{cases}$

⑧ 传送带结论：v_0(定) 物体等一直直到最终共速，传送带做的功（克服f）$W=2\Delta E_k$. * 一对作用力与反作用力总功与参考系无关. 取v_0系，有 $Q=\Delta E_k$

· 电机相关：I. 单电的 I^2r 为热损耗，$EI-I^2r$ 为外输功率（负载+空转）

II. 传送带等存在外界热损，物体动能 $\frac{1}{2}mv^2$，做功 mv^2 不要代错了！

□考试总结小点(九)

(v的影响如F.也应从x平.y平.θ转考虑)

> 磁场环运动：拥有三个自由度的运动模式（一定不要忘掉一个方向!）x. y. θ(转).
通常列牛二(x.y)和力矩(θ)即可，注意凑全微分(守恒量)。像电偶极子等亦可直接矢量导.

·注意绳对折的"均半"——由两头决定。已转过 $\frac{u+v}{2}dt$ 段，折点右推 $\frac{u-v}{2}dt$.
(又如 a_1 a_2 加速度 $\frac{a_1+a_2}{2}$)

·注意小圆环在外部大圆环内的磁通：$\Phi_净$ = 大圆环外部的Φ.
即"注意内全穿"。
如果$R \gg r$，那么r环I的感生电场$E_{(R)}$即可求(偶极子在远处B)

∴模型积累：P_1 P_2 导热层——摩擦作功会全部传给右室。

14 第1小问

·静电静磁里牛三的使用更为突出。举例：求环在竖直平面内振动周期? 对于偏离x
($x \ll R$)处环受力=带电直线受力 $\Sigma E_x \cdot 2\pi x \cdot dl + 2E_1 \cdot \pi x^2 = 0$ $\Rightarrow \Sigma \lambda E_x dl = \lambda E_1 x$.

·注意非单射函数在问及值域内分布情况时，需要加和所有定义域的取值。

·"单位时间进入(即影响)个数为λ"需要读语境和模型。如 炸弹碎片分布$\sigma_{(x)}$对应有两个θ!
未明确的情况下应先试逐个影响 $T=\frac{1}{\lambda}$. 不应直接列 λdt 的微分方程(默认了 $T \ll dt$)

·求绳拉力 一般取绳挂点(所在物)为系，更易分析。
同时注意小球做的真正(可能是平动v, a, 可能还含转动ω, β. 注意加相应惯性力)运动是什么，不一定是以挂点为中心的圆周运动!
举例：

15 仁读 ·用余弦定理合成时注意是"相对速度"还是"换系叠加"!

> 交叉点 v.a 求解思想：(求导除外) 设一解二。1号物系和2号物系中相对速度的方向已知，等于减少了2个未知量，即解出来了。v.a都是一般的换系路子。可以设$a_{\tau1}$, $a_{\tau2}$, 解方程。
也可以(如果简单)直接画矢量图取直线交点。如

切接点 v.a 求解思想：P_1 P_2 空间里的切接点

v. 纯滚情形：两物接触点 v_n, v_τ 速度完全一致 ⇒ 关联(更严格，不一定都能实现)

若求P点速度，取P_1系和P_2系(P_1, P_2)，都是一个切向相对速度，没法设一解二。但纯滚有角位移关系(通常是这边转角跟那个转角相同之等：) $v_{P相} = r\omega$ 相对O!!

(非纯滚情形：v_n一致。若求P点速度，完全等同于"交叉点"，设一解二。)

另外，P点速度还可以更宏观的视角去求，即其"强行因素"定下的轨道位形。

a. 把v形态的参量代以θ，有$\dot{\theta}$，然后求导解决，如果可行的话。

□ 考试总结小点(十)

(続>)

刚体运动学办法：首先物体不脱离，a_n 一致。▷要注意，a_n 是表征物体位形的条，如

(非纯滚情形：与交叉点无异，设一解二，只不过这里 a_1、a_2 不是任取的。⇒ 关联。有一个关联。)

P_1 的 $a_n \neq P_2$ 的 a_n

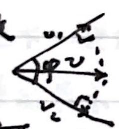
而 O 的 $a_n = P_2$ 的 a_n

纯滚情形：可以解出 a_1、a_2。利用 a_n 一致和纯滚条件 求 a_p ($a_{相//} = \beta_{相} r$)

▷ 纯滚条件使用需要换系、换转系，考察 $\vec{v}$ 可以帮你验证前面 $\vec{v}$ 相关的算对了没有。(当然，或者直接这么算)

$\vec{a}$ 换系注意：I. 平动(P_1 点 $\vec{a}_{P_1}$)加速度，转系加速度($\omega_1^2\vec{r}$、$-2\vec{\omega}_1\times\vec{v}'$、$-\vec{\beta}_1\times\vec{r}$)一项都不能少，而且注意是反着加的("真"对地 $\vec{a}_2$ 是已知(设)的)(而设一解二"是换到地系作算，正着加) II. 纯滚转速也要叠加 $\vec{\beta}_1 \pm \vec{\beta}_2 = \vec{\beta}_{相}$

附：狗函数



$$v = \frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\varphi}}{\sin\varphi}.$$

而求 a_p 类似，取其相对 P_1、P_2、环心等系作变换(建议求导解决 $\vec{a}$)

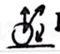
·  等温作功 $p_0V_0\ln\frac{V_f}{V_i}$ 不要用太快，V_f、V_i 仍是真正过程物质占体积，非如左图示的总 V。

△ 考试方法论(一)

(尤其是力学,一定要有全貌)

· 考虑题目不要先构建物理情境,先粗后细,全流程共需哪些环节,有一些是可以合并起来算普适的,有些可以一直表出答案再近似:先用中间量表答案,再近似得出中间量 —— 拆解运算过程,合并运算环节。(能先不近似就先不要近似,36届复三)

· 前后小题要适当联系,是否可以延拓和代入一些无机量? → 没机制具体要求的一些值,边界条件,无论是处在什么样的物理过程中,只要那一刻(绝态)就应满足,可以考虑到拓宽其机制。

· "某一条件"的题目(如  I_1与I_2,  T>0与绳软)不推荐一口吞,通常二选时不如逐个分析,第一个就可以得到条件(范围),时间上不相上下,逐个条件列时先宏观再微观(一口吞往往看不出来,很难解),有时可以得到更简单的关系($\beta_1=\beta_2$而非$a_c=0$)(从临界除外,通常能直接代入临)

· 关注题目的"临界性",往往解临界情况(会有许多直观结论)会与不等式差上很多,不等式列好列,做得出来做不出来不得而知。

· 答案的反身自检,如利用θ为小角计算化简得了θ,可以看看$\theta \ll 1$是否提供了新的化简,通常出现在前面步骤近似不到位的情况。
利用条件 ⇒ 检查条件

· 在一个机制过程里要直观把握变量(自由度)有哪些?制变 or 随变?尤其是算微分方程式的时候。

· 表达式冗长首先看看自己是否出差错,没有则应鼓起勇气试着代入化简,很可能有办法变短,尤其是后续小问仍需利用的时候。

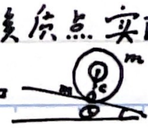
· 质疑答案,发散性 $\frac{1}{\sin\dots}$ $/\ln\dots$ 时,可以先关注一下本题情境里能取的定义域。

☆ 做动力学题应先考虑 E.L 等一次积分,无法解决再寻求牛二微元过程。
贪心口诀:"先整体,后微元;先守恒,后积分;先直观,后解析"
EL!!

· 书写:微分方程,一阶可分离的写出分离式或原式;一阶非齐次的尽量保证算对或列出 $Ce^{-\int P dx}+\dots$;二阶直接积两次的,每次都写,定常数 $C_1=\dots$;二阶线性的写特征方程,写其解和 $C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$,再写特解。注意初值条件都要列清。

· 设字母一定要意义清晰,宁愿繁一点,如 $u_{A\to B}$ 也不要随便乱叫 u_B, v_B, v_B' 什么的。

· 草稿修改过多(数字涂改二次以上)一定要重抄重画一遍!再验算。(修正一定要动笔!不要只在脑里)

·(分析盘环二体时)若该质点实际是某物体质心,存在绕其的转动动能时,在m点上画一个圈提醒,如 

△ 考试方法论 (2)

· 连读性系统平衡条件得到的关系是题目默认应知道的. 如 $T(z) \xrightarrow{\text{大气}} P(z)$, 不需要专门去说.

· 写牛二 (特别是又打算对其积分时) 前思考一下, E (1) 行不行?

· $\cos\theta$. $\sin\theta$ 等与角度、投影、歪斜有关的因子不能因为物体小而忽略 (近似为质点作用) 例如 $r \ll l$  要算. ($\omega r = \dot{x}\cos\theta$)

· 相对论动力学题 Casio 按慢一点, 避免出差错. (字慢再抄写一遍)

· 避免计算差错: 式子按行抄写计算, 不要随意画 ● 删去, 除非是一个完整的消代步骤; 字母按规则用, 新设 ○等一定注明 (除非是定性分析一下); 不要一口气算太多 (比如拆分+乘法分配/提出, 容易另一个需分配/提出的项忘记分配了); 系数、字母要跟牢, 拆出一部分来化简时打箭头或明确表示; 分配律易差错, 一定写完整、不跳太快;

· 比较清晰的求极值题目, 脑中模型构建好, 一定要把相关物理量标上下标以显示是其函数. 如 $V_0(\omega)$, 不然求θ导极易忘掉 V_0.

· 不要二三维混乱思考! 立体图一定要画一画, 然后可以再画二维投影图.

· 答案出现 $\sqrt{\quad}$、$\sin^{-1}$ $\cos^{-1}$、$\ln$ 记得看看定义域, 可能有讨论!

· 画物体受力分析图时, 要画就一次把所有力都画上! (重力!) 避免又列时漏.

「理论力学」（简略）

§1 拉格朗日力学

- 广义坐标．自由度．运动方程
- 最小作用量原理．作用量．$S=\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot q,t)\,dt$

  拉格朗日方程 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}-\frac{\partial L}{\partial q}=0$.
- 拉格朗日函数　可加性．乘以任意常数．相差一个 $f(q,t)$ 的时间全导．时间可逆性．

  伽利略相对性原理 $\longrightarrow L(v'^2)=L(v^2)+2\frac{\partial L}{\partial v^2}\vec v\cdot\vec\varepsilon$ $\longrightarrow L\propto v^2$．$L=\frac{m}{2}v^2$

可加性．质点系相互作用描述 $\longrightarrow L=\sum_a\frac{m_a\vec v_a^2}{2}-U(\vec r_1,\vec r_2,\dots)$ $\longrightarrow$ 非笛卡尔坐标 $L=\frac12\sum_{ik}a_{ik}(q)\dot q_i\dot q_k-U(q)$

牛顿方程．力．$m_a\frac{d\vec v_a}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \vec r_a}$.

非封闭系统 $L=T_A(q_A,\dot q_A)-U(q_A,q_B(t))$.

- 运动积分．守恒定律　s个自由度．去除一个时间平移t_0（即轨道参量），剩$2s-1$个C.

可加的运动积分（7）：能量　动量（3）　角动量（3）

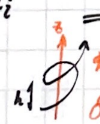
$E=\sum_i\dot q_i\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}-L$　$\vec P=\sum_a\frac{\partial L}{\partial \vec v_a}$　$\vec M=\sum_a\vec r_a\times\vec p_a$

开普勒问题：3个自由度．5个运动积分 能量（1）、角动量（ ）、拉龙楞矢量（ ）（动量不守恒，不可能是（ ））

广义动量 $p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$

广义力 $F_i=\frac{\partial L}{\partial q_i}$

$\Rightarrow$ 时空的均匀性和各向同性产生的恒定量．



螺线场：在z转$\delta\varphi$且沿之平移$\frac{h}{2\pi}\delta\varphi$对称．

$\delta L=0=\frac{\partial L}{\partial z}\cdot\frac{h}{2\pi}\delta\varphi+\frac{\partial L}{\partial\varphi}\cdot\delta\varphi$．$(\dot P_z\frac{h}{2\pi}+\dot M_z)\delta\varphi=0$

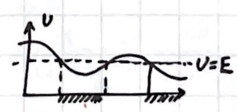
即 $P_z\cdot\frac{h}{2\pi}+M_z=Const$

- 力学相似性

$r\to\alpha r$．$t\to\beta t$：$\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\alpha^k$，$\beta=\alpha^{1-\frac{k}{2}}$.　位力定理　$2\bar T=k\bar U$

§2 运动方程的积分

- 一维运动　直接由第一积分给出运动．$\dot x=\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]}$



势阱中振动．

$T(E)=\sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$

由运动周期$T(E)$反解势能U

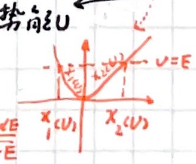
$T(E)=\sqrt{2m}\int_0^E\left(\frac{dx_2(U)}{dU}-\frac{dx_1(U)}{dU}\right)\frac{dU}{\sqrt{E-U}}$

两边除$\sqrt{\alpha-E}$，对E 0到α积分．右边交换顺序积出．令α为U

其中 $\int_U^\alpha\frac{dE}{\sqrt{\alpha-E}\sqrt{E-U}}=\pi$.

$x_2(U)-x_1(U)=\frac{1}{\pi\sqrt{2m}}\int_0^U\frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}}$

若$U(x)$对称，则唯一 $x(U)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2m}}\int_0^U\frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}}$



- 二体问题　$L=\frac12\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\dot r^2-U(r)$

有心力场的运动　$E=\frac12m\dot r^2+\underbrace{\frac{M^2}{2mr^2}+U(r)}_{U_{eff}(r)}\longrightarrow\varphi=\int\frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}}+Const$

$M=mr^2\dot\varphi$

似发散的积分，可写为$-\frac{\partial}{\partial M}\int\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}\,dr$

$U\propto\frac1r$或r^2时 $\Delta\varphi$ 为2π整倍．轨道闭合．

能够落向场中心：$r^2U(r)\big|_{r\to0}<-\frac{M^2}{2m}$ 即 $-\frac{\alpha}{r^2}(\alpha>\frac{M^2}{2m})$或$-\frac{1}{r^n}(n>2)$的形式．

- 开普勒问题　令 $U=-\frac{\alpha}{r}$. 积分 $\frac{p}{r}=1+e\cos\varphi$ (取const=0)

其中 $p=\frac{M^2}{m\alpha}$, $e=\sqrt{1+\frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$

$a=\frac{p}{1-e^2}=\frac{\alpha}{2|E|}$. $b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{M}{\sqrt{2m|E|}}$.　$T=\frac{\pi ab}{\frac{M}{2m}}=\pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$.

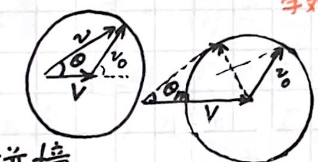
对时间的依赖关系 ⟶ 参数形式　$t=\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int\frac{r\,dr}{\sqrt{-r^2+\frac{\alpha}{|E|}r-\frac{M^2}{2m|E|}}}=\sqrt{\frac{ma}{\alpha}}\int\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}$

龙格-楞次矢量 ⟶ $\vec{v}\times\vec{M}+\frac{\alpha\vec{r}}{r}=\text{Const}$.　令 $r-a=-ae\cos\xi$. 积出

求导可证(利用 $m\dot{\vec{v}}=\frac{\alpha\vec{r}}{r^3}$). 源自动力学对称性.　$r=a(1-e\cos\xi)$, $t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi-e\sin\xi)$.

§3 质点碰撞

- 质点分裂



质心系中动能存在上限 $T_{1\max}=\frac{M-m_1}{M}\varepsilon$ ← 内能差.

- 质点弹性碰撞

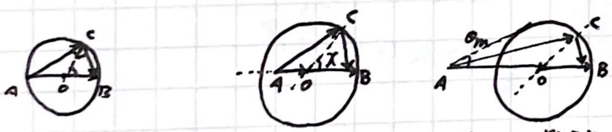
$\vec{n}_0$: 碰后质心系中所沿方向.

$\vec{OC}=m\vec{v}$.

$\vec{AO}=\frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)$. $\vec{OB}=\frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)$.

$\vec{AC}$, $\vec{CB}$ 即为碰后 $\vec{p}_1'$, $\vec{p}_2'$.

当2开始静止时：$\frac{m_2}{m_1+m_2}p_1=mv$. B在圆上.



$m_1=m_2$　　$m_1<m_2$　　$m_1>m_2$.

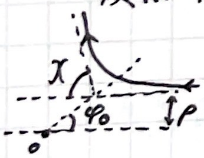
$\vec{AB}=\vec{p}_1$.

$\frac{AO}{OB}=\frac{m_1}{m_2}$.

$\tan\theta_1=\frac{m_2\sin\chi}{m_1+m_2\cos\chi}$.　$v_1'=\frac{\sqrt{m_1^2+m_2^2+2m_1m_2\cos\chi}}{m_1+m_2}v$

$\theta_2=\frac{\pi-\chi}{2}$.　$v_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v\sin\frac{\chi}{2}$

- 质点散射



$\chi=|\pi-2\varphi_0|$　⇒ $\chi(\rho)$

$\varphi_0=\int_{r_{min}}^{\infty}\frac{\frac{\rho}{r^2}dr}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2U}{mv_\infty^2}}}$

⇒有效散射截面 $d\sigma=2\pi\rho\,d\rho=2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|d\chi$

$=\frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|do$　还可用 $d\theta_1$, $d\theta_2$, $d\varepsilon$ 写.

卢瑟福公式　令 $U=\frac{\alpha}{r}$. 积分

$d\sigma=\left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2\frac{do}{\sin^4(\frac{\chi}{2})}$

↓

小角度散射　对U展开 并用ρ代替 r_{min}.

$\chi=\pi-2\varphi_0=\pi-2\left(\int_\rho^\infty\frac{\rho\,dr}{r^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}}+\frac{\partial}{\partial\rho}\int_\rho^\infty\frac{U\,dr}{mv_\infty^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}}\right)$

$=-\frac{2\rho}{mv_\infty^2}\int_\rho^\infty\frac{dU}{dr}\frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}}$.

「电动力学」(不全)

一、电磁现象的基本规律

1.1 数学预备

◦ 张量(二阶张量) $\overleftrightarrow{T} = T_{ij}\vec{e_i}\vec{e_j}$ 并矢 $T_{ij}=f_i g_j$ 或 $\overleftrightarrow{T}=\vec{f}\vec{g}$.

(矩阵形= $\vec{e_i}\,T\,\vec{e_j}^{T}$)

◦ 乘法运算 点乘

i) 矢·矢 →标 $\vec f\cdot\vec g = f_i g_i$. $\vec f\cdot\vec g=\vec g\cdot\vec f$

符号:

δ_{ij}. ε_{ijk} (交错符号)

$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}$.

ii) 矢·张 →矢 $\vec f\cdot\overleftrightarrow{T}=f_iT_{ij}$ $\overleftrightarrow{T}\cdot\vec f=T_{ij}f_j$. $\vec f\cdot\overleftrightarrow T\ne\overleftrightarrow T\cdot\vec f$ ($\overleftrightarrow T$对称时除外)

iii) 张·张 →张 $\overleftrightarrow S\cdot\overleftrightarrow T=S_{ik}T_{kj}$ $\overleftrightarrow S\cdot\overleftrightarrow T\ne\overleftrightarrow T\cdot\overleftrightarrow S$

$(\vec f\vec g)\cdot(\vec p\vec q)=(\vec g\cdot\vec p)\vec f\vec q$ ($\overleftrightarrow T$为单位张量除外. $=\overleftrightarrow S$)

iv) 双点乘

张:张→标 $\overleftrightarrow S:\overleftrightarrow T=\overleftrightarrow T:\overleftrightarrow S=S_{ij}T_{ji}$

$(\vec f\vec g):(\vec p\vec q)=(\vec f\cdot\vec q)(\vec g\cdot\vec p)$

叉乘

i) 矢×矢 →矢 $\vec f\times\vec g=\varepsilon_{ijk}f_jg_k$ $\vec f\times\vec g=-\vec g\times\vec f$

ii) 矢×张 →张 $\vec f\times\overleftrightarrow T=\underbrace{\overbrace{\varepsilon_{imn}f_m}^{(h_i)}T_{nj}}_{(S_{ij})}$ $\overleftrightarrow T\times\vec f=\underbrace{\varepsilon_{jmn}T_{im}f_n}_{(S_{ij})}$ ≠ ($\overleftrightarrow T$为单位张量除外)

可视为 $\vec f(\cdots)$依次与 $\overleftrightarrow T(\vdots)$各列叉出, 再按列排成.

$\vec f\times(\vec g\vec h)=(\vec f\times\vec g)\vec h$

$(\vec g\vec h)\times\vec f=\vec g(\vec h\times\vec f)$ 对于并矢:就近法则. (矩阵乘法的结合律)

◦ 矢量微分算符 $\nabla=\vec{e_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$. ($\vec{e_i}$从左边作用过去)

如 $\nabla\vec f=\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}\vec{e_i}\vec{e_j}$ $\nabla\cdot\overleftrightarrow T=\dfrac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}\vec{e_j}$

$\nabla\times\vec f=\varepsilon_{ijk}\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}\vec{e_i}$

证明公式 { 下标法 ijk…; 符号法 ∇_a. ∇_b…

对矢径有 $\nabla r=\vec{e_r}$ $\nabla\vec r=\overleftrightarrow I$ $\nabla\cdot\vec r=3$ $\nabla\times[f(r)\vec r]=0$.

常用举例: $\nabla\cdot(\vec f\vec g\vec h)=(\nabla\cdot\vec f)\vec g\vec h+(\vec f\cdot\nabla\vec g)\vec h+\vec g(\vec f\cdot\nabla\vec h)$

$\nabla(\overleftrightarrow T:\nabla\vec E)=\overleftrightarrow T:\nabla\nabla\vec E$ 其中$\vec E$无旋.

◦ 正交曲线坐标系 拉梅系数 $ds_i=h_idu_i$. $dV=h_1h_2h_3du_1du_2du_3$.

柱 1 ρ 1 (ρ. φ. z)

球 1 r rsinθ (r. θ. φ)

$\nabla\varphi=\dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_i}\vec{e_i}$. $\nabla\cdot\vec f=\dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial u_i}(h_jh_kf_i)\right]$ $\nabla\times\vec f=\dfrac{1}{h_ih_j}\left[\dfrac{\partial}{\partial u_i}(h_jf_j)-\dfrac{\partial}{\partial u_j}(h_if_i)\right]\vec{e_k}$

$\nabla^2\varphi=\dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial u_i}\left(\dfrac{h_jh_k}{h_i}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_i}\right)\right]$

◦ 积分公式 $\oint_S d\vec\sigma=\iiint_V dV\nabla$ $\oint_C d\vec l=\iint_\Sigma d\vec\sigma\times\nabla$

这里只对$\vec f$进行微分, 故∇可以直接轮换.

注意作用的方向和形式、证明可采用"常量点乘法"(任意性)

格林公式

(一) $\oint\psi\nabla\varphi\cdot d\vec\sigma=\iiint(\psi\nabla^2\varphi+\nabla\psi\cdot\nabla\varphi)dV$ (二) $\oint(\psi\nabla\varphi-\varphi\nabla\psi)\cdot d\vec\sigma=\iiint(\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi)dV$

(三) $\oint\varphi\nabla\varphi\cdot d\vec\sigma=\iiint(\varphi\nabla^2\varphi+(\nabla\varphi)^2)dV$

亥姆霍兹唯一场定理 给定单连通解域V内矢量场的梯度和旋度，以及边界S上的法向分量，则该场被唯一确定。

证明：反证法＋格林(三)，$\vec{a}=\vec{A_2}-\vec{A_1}$，$\nabla\cdot\vec{a}=0$，$\nabla\times\vec{a}=0$，$a_n|_s=0$。
那么$\vec{a}$可表为$\nabla\varphi$。$\Rightarrow \iiint_V(\nabla\varphi)^2dv=\iiint_V\vec{a}^2dv=\oint_S a_n\cdot\varphi d\sigma=0$。$\vec{a}$处处为$\vec{0}$。

- **δ函数** $\delta(\vec{r}-\vec{r_0})=\begin{cases}\infty & \vec{r}=\vec{r_0}\\ 0 & \vec{r}\neq\vec{r_0}\end{cases}$ 且 $\iiint\delta(\vec{r}-\vec{r_0})dv=1$。 $\iiint f(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r_0})dv=f(\vec{r_0})$

常用表达式：$\delta(\vec{r}-\vec{r_0})=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r_0}|}$ ← 对$\vec{r}\neq\vec{r_0}$处，将∇^2算出得证$=0$。
对$\vec{r}=\vec{r_0}$，微分失去定义，取体积分$=1$，对应δ。

1.2 描述电磁场

- 来源于实验：$F=\frac{kq_1q_2}{r^2}$，$F=qv\times B$，$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\times r}{r^3}$，$\varepsilon=-\frac{d\phi}{dt}$。
- **麦克斯韦方程组**

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}\xrightarrow{\text{引入辅助矢量}}\begin{matrix}\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\\ \vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{M}\end{matrix}\quad\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j_0}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho_0\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}$$

(其中 $\rho'=-\nabla\cdot\vec{P}$，$\vec{j'}=\nabla\times\vec{M}+\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$)

但麦方程组建立在电荷守恒的假设上，还是守恒是“先”。

其常替代掉组中二式。 并不独立，可由方程组中二三两式消得

电荷守恒方程 $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{j}=0$ 约束场源。

洛伦兹力公式 $\vec{f}=\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B}$ 联系场与场源运动。

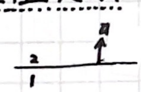
电磁性能方程 $\vec{D}=D(\vec{E},\vec{B})$，$\vec{H}=H(\vec{E},\vec{B})$ 介质的具体性质，束缚场源与外场的关系。
常见：$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$，$\vec{H}=\frac{1}{\mu}\vec{B}$。

导体 $\vec{j_0}=\sigma\vec{E}$

由麦方程组积分形式得来。
换句话说，积分形式比微分形式更普遍。

边值关系

$$\begin{cases}\vec{n}\times(\vec{E_2}-\vec{E_1})=0\\ \vec{n}\times(\vec{H_2}-\vec{H_1})=\vec{i_0}\\ \vec{n}\cdot(\vec{D_2}-\vec{D_1})=\sigma_0\\ \vec{n}\cdot(\vec{B_2}-\vec{B_1})=0\\ \vec{n}\cdot(\vec{j_{02}}-\vec{j_{01}})=-\frac{\partial\sigma_0}{\partial t}\end{cases}\qquad\begin{matrix}\vec{n}\cdot(\vec{P_2}-\vec{P_1})=-\sigma'\\ \vec{n}\times(\vec{M_2}-\vec{M_1})=\vec{i'}\end{matrix}$$



齐次用于求解。
非齐次事后用来求得界面信息

1.3 电磁场的物质属性

- **能量** 功率密度 $p=\vec{j}\cdot\vec{E}=\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\cdot\vec{E}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\vec{E}$

$$=\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\vec{B}\times\vec{E})+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{E})\cdot\vec{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\vec{E}$$

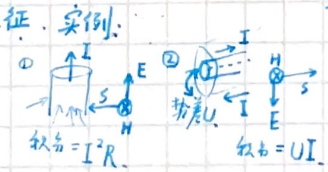
$$=-\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)$$

$\Rightarrow \boxed{\vec{j}\cdot\vec{E}=-\frac{\partial w}{\partial t}-\nabla\cdot\vec{S}}$ $\quad w=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2$ 电磁能量密度

$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$ 电磁能流密度(坡印亭矢量)

$\frac{dW_m}{dt}+\frac{d}{dt}\iiint w\,dv=-\oint\vec{S}\cdot d\vec{\sigma}$。

$\vec{S}$：能量转移的表征，实例：



实际上，$\vec{S}$加上任意旋度都没有影响，
为了确保所有惯参协变、和实验对其意义的验证，
能流密度被唯一的确定为$\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$。

- **动量** $\vec{f} = (\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}\cdot\varepsilon_0 + [\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B}) - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}]\times\vec{B}$

$$= \varepsilon_0\cdot[\nabla\cdot(\vec{E}\vec{E} - \frac{1}{2}E^2\overleftrightarrow{I}) + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\times\vec{E}] + \frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\vec{B}\vec{B} - \frac{1}{2}B^2\overleftrightarrow{I}) - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}$$

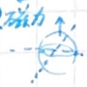
$\Rightarrow \boxed{\vec{f} = -\frac{\partial\vec{g}}{\partial t} - \nabla\cdot\overleftrightarrow{T}}$ $\quad \vec{g} = \varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{S}$ 电磁动量密度

$\frac{dG_m}{dt} + \frac{d}{dt}\iiint \vec{g}\,dV = -\oiint d\vec{\sigma}\cdot\overleftrightarrow{T}$ $\quad \overleftrightarrow{T} = w\overleftrightarrow{I} - \varepsilon_0\vec{E}\vec{E} - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B}$ 电磁动量流密度

（麦克斯韦应力张量 $\overleftrightarrow{\mathcal{T}} = -\overleftrightarrow{T}$，有 $\iiint F_{合}\,dV = \oiint \overleftrightarrow{\mathcal{T}}\cdot d\vec{\sigma}$）

宏观电磁力 + 媒质不均匀的显现力 + 内应力（场致伸缩力）

举例：



Q, R，球壳均匀带电，求上下半球间斥力？（用一般投影法可得验）外部明显无应力，可取S半球面 ∞，只剩中央盘面 $\mathcal{T}$ 积分。

$\overleftrightarrow{\mathcal{T}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\begin{pmatrix} E^2 & 0 & 0 \\ 0 & -E^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E^2 \end{pmatrix}$（坐标轴沿E向）

$d\vec{\sigma}$（$-z$向）$\Rightarrow \int_R^{\infty} 2\pi r\,dr\,\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0 r^2)^2} = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2}$.

- **角动量** 矢径叉乘上式。

$$\vec{r}\times(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}) = -\nabla\cdot(\overleftrightarrow{T}\times\vec{r})$$

其中用到 $\overleftrightarrow{T}$ 是对称的并矢的线性组合。

$\boxed{\vec{r}\times\vec{f} = -\frac{\partial\vec{l}}{\partial t} - \nabla\cdot\overleftrightarrow{R}}$ $\quad \vec{l} = \vec{r}\times\vec{g} \quad \overleftrightarrow{R} = -\overleftrightarrow{T}\times\vec{r}$

- **介质情况下** 套用DH版麦方程组推得

$$P_0 = -\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} - \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})$$

$$\vec{f}_0 = -\frac{\partial(\vec{D}\times\vec{B})}{\partial t} + \nabla\cdot(\vec{D}\vec{E} + \vec{B}\vec{H}) - (\nabla\vec{E})\cdot\vec{D} - (\nabla\vec{H})\cdot\vec{B}$$

寻找关系，使之能对易，凑出主。

能量 $\rightarrow$ 线性

$$\boxed{\begin{aligned} w_0 &= \frac{1}{2}(\vec{D}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{H}) \\ \vec{S}_0 &= \vec{E}\times\vec{H} \end{aligned}}$$

动量 $\rightarrow$ 线性均匀

$$\overleftrightarrow{T}_0 = w_0\overleftrightarrow{I} - \vec{D}\vec{E} - \vec{B}\vec{H}$$
$$\vec{g}_0 = \vec{D}\times\vec{B}$$

角动量 $\rightarrow$ 线性均匀各向同性

$$\vec{l}_0 = \vec{r}\times\vec{g}_0$$
$$\overleftrightarrow{R}_0 = -\overleftrightarrow{T}_0\times\vec{r}$$