No.

Date

上
1 数学
2 力学
3 电磁学

下
4 热学
5 光学
6 原子
7 相对论
8 总结

如有遗失，烦请联系：

不胜感激！

△积分

一、基础公式利用　积化和差、和差化积、倍角半角、欧拉公式。　12.7)

二、分段、奇偶性　△如 $\int \frac{x}{(x+b)^2}dx$.

三、第一类换元、有理分式 ═══ 配凑

$\longrightarrow \frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}$ {
i 解 =0 根、平方差、立方差.
ii 待定系数
iii 极限取值、代入取值.

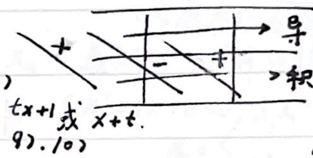
3).4).5)

以及一些独特的配凑，如 $d(x\mu^2)$, $d(x \pm \frac{a}{x})$, $A(\text{分母}) + B(\text{分母})'$ ……

四、第二类换元 {
三角、双曲换元
倒代换
万能代换　2).3).
Euler 代换 $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ ⟶ $tx+1$ 或 $x+t$.　9).10)
隐函数限制　6)

$\left(\begin{aligned} \operatorname{arctan} x' &= \frac{1}{1+x^2} \\ \operatorname{arth} x' &= \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}\right)$
$(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x})$

五、分部 —— 表格法（反对幂三指）



i 求至 0 止.
ii 求至循环止.（Bring it over）
iii 及时调整.
上下移动.

加 C 一律省略

六、特殊方法 {
含参　11).12)
级数　13).14)
高重　$\int e^{-x^2}dx$. $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
留数　15).16)

零、记背

i $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$

$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$　$\left(\begin{aligned}\int \sec\theta d\theta &= \ln\left|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})\right| \\ \int \csc\theta d\theta &= \ln\left|\tan\frac{\theta}{2}\right|\end{aligned}\right)$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$　$(\int \csc\theta d\theta = \ln|\csc\theta - \cot\theta|)$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$　$\sec\theta$ 元　$\int \sec\theta d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta|$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$　$\tan\theta$ 元　$= \left\langle \begin{aligned} &\operatorname{arch}^{-1}(\sec\theta) \\ &\operatorname{arsh}^{-1}(\tan\theta) \end{aligned}\right.$

ii $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) & a^2>b^2 \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}}{\tan\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}}\right| & a^2<b^2 \end{cases}$

iii $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{c+bx-ax^2}} = -\frac{1}{a}\sqrt{\cdots} + \frac{b}{2a^{\frac{3}{2}}}\arcsin\frac{2ax-b}{\sqrt{\Delta}}$

题目举例（纸上有答案）

1) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\tan\frac{3}{2}x}dx$　2) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$

3) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}dx$

4) $\int \frac{dx}{1+x^6}$　5) $\int \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

6) $y(x-y)^2 = x$ 时 $\int \frac{1}{x-3y}dx$

7) $\int \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots\sqrt{2+x}}}}}_{n\text{个}}dx$

8) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$

9) $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx$　10) $\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,dx$

11) $\int \frac{x\cos x}{(1+\sin x)^2}dx$　12) $\int_0^1 \frac{x^5-1}{\ln x}dx$

13) $\int_0^\infty \frac{e^x}{x^3-1}dx$　14) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}dx$

15) $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx$　16) $\int_0^\infty \sin(x^2)dx$

几个点：

· 题目中需要积分却较难积时（如 Euler 型）应先检查列式；再看看是否有同类项未合并等；最后，可以先积一般式（有时候 no!）再代，会清晰一点。

· $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$　$\frac{1}{1+x^2}$　$\frac{1}{1-x^2}$
arcsin　arsh　arch　arctan　arth
$(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))$　$(\ln(x+\sqrt{x^2-1}))$　$(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x})$

· $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ 积分如果是 $\frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}$ 即 $(x-a)$ 两因式相乘型的是比较好积的，有 $\int \frac{dx}{(x-x_1)(x-x_2)}$ $\xrightarrow{x'=x-\frac{x_1+x_2}{2}}$ $\frac{1}{x_2-x_1}\ln\frac{x_2-x}{x-x_1}$（或分部分式亦可）

△ 数学：广泛

· 绝热方程微分式 $\frac{dA}{A}+\lambda\frac{dB}{B}=0 \Rightarrow AB^{\lambda}=Const$.

·· 微扰论求解方程$^{(一)}$ $0=A_0+A_1S+A_2KS^2+A_3K^2S^3+\cdots$ (一般由展开得)

(分级求解) 对 $K\ll1$ 展开 $S=S^{(0)}+S^{(1)}+\cdots$ [$S^{(小量阶数)}$] (其实算是"(二)"中物理模型意义的逐级拆分)

其中 $0=A_0+A_1S^{(0)}$, $0=A_1S^{(1)}+A_2KS^{(0)2}$, …

· 遇到此类 $y'=\frac{Oy}{Oy+Ox}$，可以倒过来 $x\leftrightarrow y$. 变成 $\frac{dx}{dy}$ 的一阶微分方程解.

·· 数列通项常见：① $x_{n+1}=\frac{ax_n+b}{cx_n+d}$ 设为 $x_0=\frac{ax_0+b}{cx_0+d}$ 解得 $\begin{cases} x_0=x_1,x_2: \left\{\frac{x_n-x_1}{x_n-x_2}\right\} 等比 \\ x_0 重根: \left\{\frac{1}{x_n-x_0}\right\} 等差 \end{cases}$

▷很可能 x_1、x_2 是倒数关系 $x_1=\frac{1}{x_2}$，化简上会好很多.

② (一阶递推同理) (x_0 虚应该为周期数列)

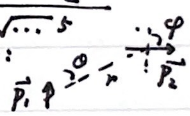
$x_{n+2}+ax_{n+1}+bx_n=q$. $x_n=$ 通解 + 特解（q猜）

$(x^2+ax+b=0$, $x_n=\begin{cases}\lambda_1x_1^n+\lambda_2x_2^n \\ (\lambda_1+\lambda_2 n)x_0^n\end{cases})$

· 求导结论 $(\sqrt{ax^2+bx+c})''=-\frac{\Delta}{4\sqrt{\cdots}^3}$

(例 $(\frac{x}{\sqrt{ax^2+b}})'=\frac{b}{\sqrt{\ }^3}$) $\left(\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\right)''=\frac{\frac{\Delta}{4}+\frac{(2ax+b)^2}{2}}{\sqrt{\cdots}^5}$

· 极坐标等非直角坐标下张量具有形式不一样！例如：



(两电偶极子间作用力)

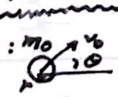
不要代 $\vec{F}=\vec{p}\cdot\nabla\vec{E}$，没有 $\begin{pmatrix}\frac{\partial E_r}{\partial r} & \frac{\partial E_\theta}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial\theta} & \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial\theta}\end{pmatrix}$ ×！请用 $W=-\vec{p}\cdot\vec{E}$ 求导做.

· 极坐标曲线 $r(\varphi)$ 求面积注意可以积 $\frac{1}{2}\int r^2d\varphi$.

· 最值相关不等式：$\sqrt{\frac{\sum a^2}{n}}\geq\frac{\sum a}{n}\geq\sqrt[n]{\prod a}\geq\frac{n}{\sum\frac{1}{a}}$ 见如相对论碰撞阈.

·· 微扰论求解体系(2) 通常模型里运动受到一较小的扰动影响运动情况，而此扰动量很小（题应说"只保留到…一阶项"），无扰动情况得出非常快，故可以将物理量运动变化情况 S 拆分为 S^0+S'，S^0 为熟知，S' 为一阶修正项. 其核心：只要求一阶，S^0.(一阶) + S'(零阶)，按程度近似，方程线性拆分.

回答例：



ρ 尘埃吸附的抛体.（$\rho\ll m$） $m\vec{g}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}$.

① $m_{(t)}=m_0+m'_{(t)}$，$\vec{v}_{(t)}=\vec{v}_{0(t)}+\vec{v}'_{(t)}$ $\vec{v}_0$ 为斜抛. 相乘只能是 0'.1'. 1'.1' 及以上舍去

② 代入运动方程 $m_0d\vec{v}'=-\vec{v}_0\,dm'$

拆写分量式，$dm'\sim dt$ 关系代入 ← $dm'=\rho\pi r^2\sqrt{v_x^2+v_y^2}\,dt$

1' ⇒ 1'. 0' 取 $v_{0(t)}$.

· $\frac{d^2I}{ds^2}=\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2I$ 不能直接除过去变成 $\frac{d^2I}{d\theta^2}=I$！凡是（一阶除外）变元都在从变者先实写起 $\frac{d\left(\frac{dI}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds}\right)}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds}$.

No. 1

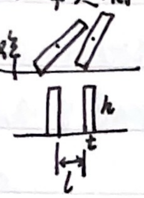
Date

△ 小量近似

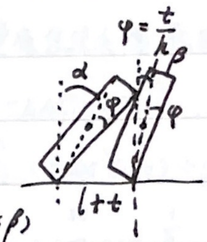
> Check: $\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}$ 一阶项?

> 几何等具体题目近似:

i 多米诺骨牌



求翻倒时最大重力势能:



$l,t \ll h.$ $E_p=\dfrac{mgh}{2\cos\varphi}(\cos\alpha+\cos\beta)$

触碰条件: $l+t-\dfrac{h}{\cos\varphi}\sin\beta-h\sin(\alpha+\varphi)=\tan(\beta+\varphi)\left(\dfrac{h}{\cos\varphi}\cos\beta-h\cos(\alpha+\varphi)\right)$

一阶 $\Rightarrow$ $\beta-\alpha+\dfrac{l}{h}=0$

* 总结:

代入E_p,积化和差提出一个定值,剩下的$\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$可取1.

能小则小,一阶先上.

尽量设小量角,正宗表达式最后近似,应先用条件近似给出关系.

ii

> 卡算小量(Casio. from K.G.):

△ 中展开

因为基本都出现在电势当中，于是中展开指代常带有余弦定理，展开复杂且不止一阶的式子。首先觉得需要记忆一些快速化的结论：$(\Delta^2+\square^2-2\Delta\square\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}$，$\Delta$为小量：

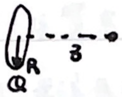
其它的然不如现推。
$$\frac{1}{\square}\Big[\underset{0}{1}+\underset{\mathrm{I}}{\frac{\Delta}{\square}\cos\theta}+\underset{\mathrm{II}}{\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\square^2}(3\cos^2\theta-1)}+\underset{\mathrm{III}}{\frac{1}{2}\frac{\Delta^3}{\square^3}\cos\theta(5\cos^2\theta-3)}\Big]$$

只要草稿条理清晰应该还是很快的。

$(\Delta^2+\square^2-2\Delta\square\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$，$\Delta$为小量：
$$\square\Big[\overset{0}{1}-\overset{\mathrm{I}}{\frac{\Delta}{\square}\cos\theta}+\overset{\mathrm{II}}{\frac{1}{2}\frac{\Delta^2}{\square^2}\sin^2\theta}+\overset{\mathrm{III}}{\frac{1}{2}\frac{\Delta^3}{\square^3}\cos\theta\sin^2\theta}\Big]$$

注意，不是所有题目都需要展开做。平衡处（经常）中需要至Ⅱ（反正Ⅰ为0，不要作无用功）

这时或许可以利用高斯定理求E的Ⅰ：



$\frac{dE_r}{dr}=-\frac{1}{2}\frac{dE_z}{dz}$。由于Ⅰ近似，就是$\frac{E_r}{r}$正比。便可得$F=-kr$之$k$。

（如果对称性很好，如柱坐标$r\to0$处）

☆ 顺带总结一下常见求近处异向场强的情形：

i

$B_{r(r)}=-\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$

喇叭形　（即上方式子）

ii

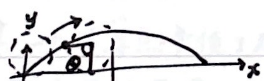
$B_{r(z)}=z\cdot\frac{\partial B_z}{\partial r}$

桶形

（以注意，它应对的简振是"大回旋"，"小回旋"是当地B下画圈，应对是μ守恒$+(v_\perp^2+v_\parallel^2)$守恒）

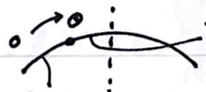
△ 平面几何

- 极坐标下，以双曲线中原点为极点，对称轴（x轴）为极轴，$r=\dfrac{b}{\sqrt{\frac{e^2}{2}\cos2\theta+\frac{e^2}{2}-1}}$
- 摆线相关：



$A=3\pi R^2$

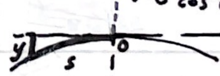
$\rho=4R\sin\frac{\theta}{2}$



$s=4R\cos\frac{\theta}{2}$

$s=4R(1-\cos\frac{\theta}{2})$

$(e^2\cos^2\theta-1)$



$y=\frac{s^2}{8R}$　$(y\propto s^2\to T=2\pi\sqrt{\frac{4R}{g}})$

常见微分形式　$y'=\sqrt{\frac{2R-y}{y}}$　$(y'^2=\frac{⊘}{y}+⊘$，或记$1+y'^2=\frac{2R}{y})$

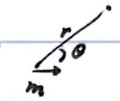
- 圆锥曲线的曲率半径：椭圆$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1\to\rho=\frac{(A^4y^2+B^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{A^4B^4}$，双曲线$\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1$ ↗

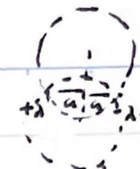
抛物线$y^2=2px\to\rho=\frac{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$

-

△ 场线/包络线

①





> 求场线最主要的一种方法就是方向微元.

积分时常数由“过…点的场线”确定.

提示：可能需要凑全微分(导构).

$B_r = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{2\cos\theta}{r^3}$

$B_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^3}$

$$\frac{dr}{r\,d\theta} = \frac{B_r}{B_\theta}$$

$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x+a}{y^2+(x+a)^2} - \frac{x-a}{y^2+(x-a)^2}\right)$

$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{y}{y^2+(x+a)^2} - \frac{y}{y^2+(x-a)^2}\right)$

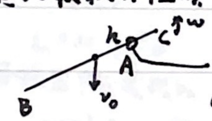
$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x}$$

> 线族包络：

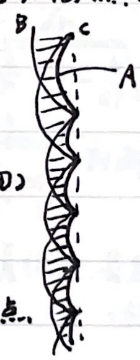
$$\begin{cases} f(x,y,\theta)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial \theta}=0 \end{cases}$$ 消去参量θ得到.
(只有一个θ值,即为界线)

抛刀包络：刀上点理论上可以把每个位置写成 $f(x,y,l)=0$ 但它并不是全体参与,只是左右端点(主要)轨迹的组合,相当于扫过面积,无法也不能使用 $\frac{\partial f}{\partial l}=0$. 这种需要另寻非暴力的方法.

这一类是比较奇异性的。 (画好图将有极大帮助)

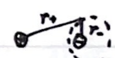


找到线状物(刀)上速度沿刀向点,其为包络线上点.
(每个时刻A都不同)
B, C 摆线 A类似的有一个参数方程



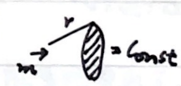
(阴影为扫面)

④ $\oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint \vec{B}\cdot d\vec{S}$ 举例：



$A \propto \ln r$

$\ln\frac{r_+}{r_-} = Const.$ (圆)



$A \propto \frac{\sin\theta}{r^2}$

$2\pi r\sin\theta A = Const.$

此例亦可应用互感互易性构造.

△ 立体几何

因为通常是某一个计算点卡住了人,于是就以人点,去式呈现好了(所有数学模块都是)

· 球坐标下夹角：

$\cos\delta = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$

总之：考试时点乘解决立体夹角.

△ 天体轨算

☆ 初态 → E, L, —— 到 r_{min}, r_{max} 处列方程 （答案爱用） ——→ a, b, c, e, $r=\frac{p}{1-e\cos\theta}$ → 解题

$E=-\frac{GMm}{2a}$　$L=mb\sqrt{\frac{GM}{a}}$

$p=\frac{L^2}{GMm^2}$, $e^2=1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}$

$p=\frac{b^2}{a}$, $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}$.

> 洲际导弹：

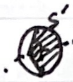
i）建极坐标时注意是 $r=\frac{p}{1-e\cos\theta}$

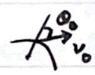

不要发到地球里去了（$r\downarrow$）

ii）结论：$v_0^2<2gR$，射程要讨论 $v_0^2\sim gR$

$$\begin{cases} v_0^2<gR & \cos\frac{\varphi_m}{2}>0 \text{ 有一极值点.} \\ v_0^2>gR & \varphi_m \text{ 可达}\pi. \end{cases}$$

> 计算在轨时间：

① 掠面（不推荐）
- 积分出面积 $\int\sqrt{\square-\circ x^2}\,dx$ 形
- 拉伸变换 $y\to\frac{b}{a}y'$，求出张角， $S'=S\cdot\frac{a}{b}$

 $t=\frac{S}{\frac{1}{2}Rv_0\sin\theta_0}$　▷注意掠面速度 $\frac{L}{2m}$.

② 直积
- 积 r
- 积 θ

$L=mr_{(\theta)}^2\dot{\theta}$

用极坐标式代入

$$t=\frac{mp^2}{L}\int\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

→ $\begin{cases} L=mr^2\dot{\varphi} \\ E=\cdots(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)\cdots \end{cases}$　消 $\dot{\varphi}$ 得 $\dot{r}=f(r)$.　$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{\square+\circ x-\triangle x^2}}$ 形（题目多半给了）

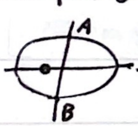
$$t=\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{r}-\frac{1}{a}-\frac{b^2}{ar^2}}}$$

▷提醒：i）积分时注意象限问题，尤其是 r.

判断方式
- 观察 $\dot{r}$ 开根时正负，$r\uparrow$? $\downarrow$?
- 代个近/远地点的时间比较

ii）积 r 时，远近地点积分时要减一点点.

iii）☆ 中间结果保留位数要多！（≥5）否则会偏差很大，甚至根号内为负了. Casio："数学错误！"（检查时注意这种原因）

iv） $T_{AB}\neq\frac{T_0}{2}$!! 看看面积：

▽ 有心力场、比耐方程

主要推导大致两条线，都是角动量守恒，再加上要么径向牛二，要么能量守恒.

L 守恒将 $\dot\theta$ 换为 (u)，从而 $\dot r$ 变为 $(u, \frac{du}{d\theta})$. (即 $\frac{d}{dt}$ 换为 $\frac{d}{d\theta}\cdot\dot\theta$)

> 非相对论：① $\frac{F}{m} = \ddot r - r\dot\theta^2 \xrightarrow{L} \ddot r = \frac{L}{mr^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{L}{mr^2}\cdot\frac{dr}{d\theta}\right) \xrightarrow{u} F = -\frac{L^2u^2}{m}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)$

二次、三次反比力都很好解. 二次反比 $\frac{d^2u}{d\theta^2}+u = \frac{GMm^2}{L^2} = \frac{1}{p}$.

不过三次反比 $\omega_r : \sqrt{\alpha+3}\,\omega_0$ 抗不了微扰，$u \sim \sin(\Omega\theta+\theta_0)$，$\sin$ 来一个 0 就送到 ∞ 去了.

② $E = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) - GMmu \xrightarrow{L} E + \frac{G^2M^2m^3}{2L^2} = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2m}\left(u - \frac{GMm^2}{L^2}\right)^2$

▷ $E = (\cdots)\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + (\cdots)u^2$ 基本简振形

由于给出了 Const 值的，振幅 ε 可以确定（F_r 却得不到）

> 相对论：① $ku^2\hat r = \frac{d}{dt}(p_r\hat r + p_\theta\hat\theta) \xrightarrow[(\dot\theta \text{即} L \text{守恒})]{\text{取出}\hat r\text{向}} ku^2 = \frac{dp_r}{dt} - p_\theta\cdot\dot\theta = \dot\theta\left(\frac{dp_r}{d\theta} - p_\theta\right)$

（k 为如 GMm，$\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0}$ 等）

$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1-\frac{k^2}{L^2c^2}\right)u = -\frac{kE}{L^2c^2} \xleftarrow{m} \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{km}{L^2} \xleftarrow{L}$

m 由 E 表示（惯用手段）$E = ku + mc^2$.

如电子绕核进动 $\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{L^2c^2}}} - 1\right)$

② $(E+ku)^2 = m^2c^4 + c^2(p_r^2 + p_\theta^2) \xrightarrow{L} (E+ku)^2 = m^2c^4 + L^2c^2\left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right)$

（此处 m 为静）

基本形即 $\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \left(1-\frac{k^2}{L^2c^2}\right)\left(u - \frac{Ek}{L^2c^2-k^2}\right)^2 = \frac{E^2k^2}{L^2c^2(L^2c^2-k^2)} + \frac{E^2-m^2c^4}{L^2c^2}$

△ 振动过程的解析与讨论

除了求ω、T的题以外，还有需要准确分析简振时刻及带有n性质的讨论的运动过程图景的题，通常涉及"衔接时刻的位相"、"平衡位置的摇摆"。

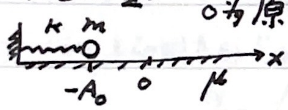
[Ex] 滑动判断：　T3C3

$m=2kg$ 圆筒。
$M=1kg$ 平板，$K=100N/m$ 弹簧，水平面光滑，板间间 $\mu=0.5$
板足够长，现一起右移伸长 $0.3m$ 后释放，求至板第一次到达最左端用时。

□ 滑与不滑 ⟶ 同速？$v\sim v_c-\omega r$　i) 无滑时 …… (动力学方程)
维持同速 ⟶ $f_{维}^{?}\leq f_m$。　$\Rightarrow f=50x$，$\Omega=5\sqrt{2}$。
滑动时　$\Omega=10$，$(f=f_m=10)$

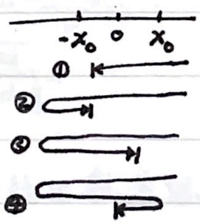
ii) 物理过程：初 $f=15>f_m$，写出滑动 $x, v, v_c, \omega_{(t)}$。　t_1
令 $v=v_c-\omega r$，判 $f\leq f_m$，则不滑，写出 $x, v_{(t)}$　t_2
令 $|f|\geq f_m$ 滑动 $(=50x_1)$，写出 $x, v_{(t)}$ 至 x_m。　t_3
$\} t$

[Ex] 讨论位置：　T1C2

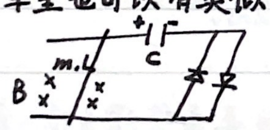


0为原长，$-A_0$ 处释放，小球只能完成n次往返（向右过0再向左过0为1次）求至停止经过路程。

□ 注意　有①、(②、③)、④种情况，讨论 A_0。



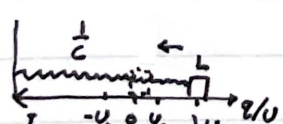
▷电学里也可以有类似情况：



C已充 λU_0 电，二极管导通阈值 U_0。
无电阻，杆自感 L。

I、动杆的动生电动势具有电容性质，
可以认为能量存到了速度里，$C=\frac{m}{B^2l^2}$。
即串联 $\frac{1}{C_总}=\frac{1}{C}+\frac{B^2l^2}{m}$，(能 $\frac{q}{2}$ $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C'}$)

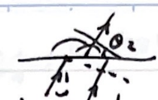
II、可以画力电类比图，二极管阈相当于摩擦力。



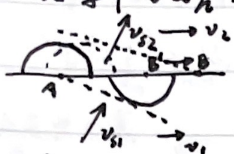
$I\sim -v$　(沿I绕向 G
$q\sim x$　顺向降落为正向力)
$U_0\sim F$

* 但这只是辅助，还是正经写最好，这种分析很不全面。

△ 折射定律、光力类比

惠更斯原理是本源。  $\frac{v}{\sin\theta}=Const$

光学中 $v\propto\frac{1}{n}$. 于是有折射定律. 下面推导运动介质中的折射定律.



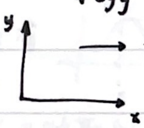
设 $\overline{AB}=x$ 则 取两束光到达时差 t.
$\sin\theta_1=\frac{v_{s1}t}{x-v_1t}$
$\sin\theta_2=\frac{v_{s2}t}{x-v_2t}$
$\Rightarrow \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{v_{s2}+v_2\sin\theta_2}{v_{s1}+v_1\sin\theta_1}$

看到这里还是"$\frac{v}{\sin\theta}=Const$"的形式.

而光力类比只是人为的建立了一个界面受力(势场)的模型(只有法向受力). 形式的对应光几何传播的路径. 并没有体现本质. 但可以很好地帮助想象可能光路($E_p\propto -n^2$) 考试不建议使用.

> 最速降线: $n=\frac{c}{\sqrt{2gy}}$. $\frac{\sin\theta}{\sqrt{y}}=Const$. 积分得到. (实际计算基本不会遇到. 也完全可绕开)

$\boxed{Ex}$ 风中传声: T2C2



$v=v_0+ky^2$. $\frac{ky^2}{V_s}\ll 1$.

声速为 V_s. $x=0$ 的地面处发出一束声波. 与 y 轴夹角 θ_0. 求传播的轨迹.

□ 代入上面推导的式子得

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta_0}\left(1-\frac{k\sin\theta_0}{V_s}y^2\right)^2-1}$$

$$\Rightarrow y=\cos\theta_0\sqrt{\frac{V_s}{2k\sin\theta_0}}\cdot\sin\sqrt{\frac{2k}{V_s\sin\theta_0}}x$$

▷ 注意近似不要过分! $\frac{dy}{\sqrt{\cot^2\theta_0-\frac{2ky^2}{V_s\sin\theta_0}}}=dx$ 为止. 三角函数($\cot\theta_0$)可以趋向于0. 小量也不给近似.

▷ 其实开根 $\frac{dy}{dx}=\pm\cdots$

有一部分题要求寻找用时最短的轨道路径. 我们通常会选择①光力类比. 即说 $t=\int_A^B\frac{dl}{v}=\cdots$ 与几光费马原理有一致形式. 引入折射率分布 $n_{(r)}=\frac{1}{v_{(r)}}$. 再利用诸如 $n_{(r)}r\sin\theta=C$ 等折射定律. 再积出轨道.

②(不推荐) 列出理力形表达式 $t=\int_A^B f(r,\dot{r},\theta)d\theta$. 代入 L 方程. 解之. 不过实际反而比①慢. ①的折射定律就能直接列出.

▽ n维球

① 取为半径单位 ($V=V_n\cdot r^n$) 初项 $V_0=1$. $V_1=2$.

理解: $x^2+y^2+z^2=1$. $x^2+y^2=(\sqrt{1-z^2})^2$. 对于z处是一个$r=\sqrt{1-z^2}$的2维球.

$$V_n=\int_{-1}^{1}V_{n-1}\cdot(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt \xrightarrow{令t=\sin\theta} V_n=V_{n-1}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\,d\theta$$

由点火公式

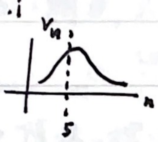
$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(n-1)!!}{n!!} & n偶\\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & n奇\end{cases}$$

递推得到

$$V_n=\begin{cases}(\frac{\pi}{2})^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{n!!}\cdot 2^n=\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{n!!} & n偶\\ \cdots=\frac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n!!} & n奇\end{cases}$$

可以合并写为 $V_n=\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!}$ $\left((n-\frac{1}{2})!=\dfrac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^n}\right)$

i) 取r=1时有 $\lim_{n\to\infty}V_n=0$ 约在5时取到max



ii) 由展开 $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\pi^m}{m!}=e^{\pi}$. 发现所有偶维单位球体积和为一有限值.

iii) S_n可由V_n求导得 (对r) $S_n=\dfrac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!}$ 有常用递推: $S_{n+2}=\frac{2\pi}{n}\cdot S_n$

②

首先有 $\sqrt{\pi}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$. 那么 $\pi^{\frac{n}{2}}=(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x_i^2}dx_i)^n=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sum x_i^2}dx_1\cdots dx_n$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-r^2}\cdot S_n r^{n-1}dr$$

则
$$S_n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\int_{-\infty}^{\infty}r^{n-1}dr\cdot e^{-r^2}}=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\int_{-\infty}^{\infty}(r^2)^{\frac{n-1}{2}}e^{-r^2}dr^2}=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\left(=\frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!}\right)$$

▽ 伽马函数

第二类欧拉积分 $\Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt$

$\Gamma(1)=1$. $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

$\Gamma(x+1)=x!$. $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$

$\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})$ x为正整数时 $\Gamma(x+\frac{1}{2})=\frac{(2x-1)!!\sqrt{\pi}}{2^x}=(x-\frac{1}{2})!$

斯特林公式 (x很大时) $\Gamma(x)\sim x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\sqrt{2\pi}$ 粗略 $\Gamma(x)\sim(\frac{x}{e})^x$. $\ln\Gamma(x)\sim x(\ln x-1)$

△天体·广相 (一)

径向微振也有可能出现在旋转圆转的粒子等等一些势场模型中，但因角动量代出 $E_{eff}(r)$ 径向多能是普适，统一归结在这里。△天体基本的轨道见1中。

> 径向微振(一)：$U_{eff}(r_0)$. $\omega=\sqrt{\frac{U_{eff}''(r_0)}{m}}$. $\Omega=\omega-\omega_0$. 思路上应该没有困难。

注意本质就是

$$\begin{cases} m(\ddot r - r\dot\theta^2)=F_r \\ m(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)=F_\theta=0 \to L=const \end{cases} \xrightarrow{积分} E=f(\dot r^2, r)$$

$U_{eff}(r)$ ($U_{(r)}+\frac{L^2}{2mr^2}$)；$E$：积分常数(初态)；动($\frac{1}{2}m\dot r^2$)

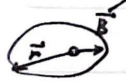
径向等效力 $F_{eff}=F_r+\frac{L^2}{mr^3}$

有时候不一定是简单的天体 r^{-2} 次场，但都是由此式给出左右界，U''给出小振。

> 潮汐锁定：如果是两星体的双星系统，只要抓住总角动量守恒就解决了。另外一类是考察球上的潮汐，只需写清势能，可能要做适当近似，解出等势面即可。(见"5中展开")

(⊙) $V_e+V_{离(c)}$　　M ○ C ⊙ E　$V_e+V_m+V_{离(c)}$

> 广相修正 > 隆格-楞次矢量 $\vec B=m\vec v\times\vec L-m\alpha\hat r$ ($\alpha=GMm$)



$\vec B$守恒($\frac{d\vec B}{dt}=0$)，指向近日点方向。与常见表式关系：$e=\frac{B}{m\alpha}$. $a=\frac{p}{1-e^2}=\frac{\frac{L^2}{m\alpha}}{1-\frac{B^2}{m^2\alpha^2}}$.

由 $\vec B\cdot\vec r=Br\cos\theta=-m\alpha r+L^2$ 得 $r=\frac{L^2}{m\alpha+B\cos\theta}$.　(取$|B|^2$($\dot r^2+\dot\theta^2$)可得$m\alpha e$)

① 龙格矢量可以来解决速度的比值和方向的数学性问题。(让$\vec e$为 ⊙→)

$\frac{1}{\alpha}\vec v\times\vec L=\frac{\vec B}{m\alpha}+\hat r=\vec e+\hat r$.　($\vec L$守恒且与$\vec v$平面垂直，可以不干扰$\vec v$在1,2两处的条件)

如：转角90° $(\vec e+\hat r_1)\cdot(\vec e+\hat r_2)=0$　速度大小 $\frac{|\vec v_1|}{|\vec v_2|}=\frac{|\vec e+\hat r_1|}{|\vec e+\hat r_2|}$. 之后转化为高考向量几何(关系)。

$\boxed{Ex}$ 卫星某两处$\vec v$方向垂直，且大小1:2，求轨道离心率最小值。⇒ $e_{min}=\frac{\sqrt5}{5}$.

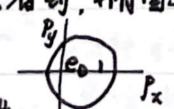
广相添加了一项势能的修正 $-\frac{\alpha}{r}-\frac{\alpha L^2}{m^2c^2r^3}$.

于是$\frac{d\vec B}{dt}$缓慢变化，近日点进动。$\frac{d\vec B}{dt}=-\frac{3\alpha L^2}{m^2c^2r^4}\hat r\times\vec L$，转动$\omega_B=\frac{|\frac{d\vec B}{dt}|\cos\theta}{B}=\frac{3\alpha L^3}{m^2c^2r^4B}\cos\theta$.

一周期进动 $d\varphi=\int_0^T\omega_B dt \xrightarrow[dt=\frac{mr^2d\theta}{L}]{代入r(\theta)} \int_0^{2\pi}\frac{3\alpha}{mc^2BL^2}\cdot(m\alpha+B\cos\theta)^2\cos\theta\, d\theta$

$=\frac{6\pi\alpha^2}{c^2L^2}$ $(=\frac{6\pi GM}{c^2a(1-e)})$

附：龙格矢量可以看到，椭圆运动的相图是一个正圆。(符号和方向或许上也许有差)

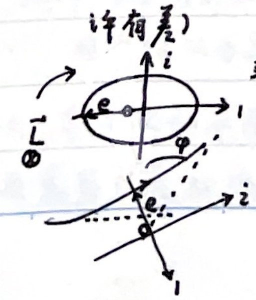


② 总之，龙格矢量$\vec B$中由于带有$\vec p$且守恒，可以方便的解决速度及其方向$\vec v$的问题。

☆ $\vec B=\vec p\times\vec L-m\alpha\hat r=m\alpha\vec e$　最常用的就是联合复平面。

建立实轴正沿近日点指日方向，如左图。(α吸引为正，$\vec F=-\frac{\alpha}{r^2}\hat r$)

$\vec p\times\vec L$即ipL (用到时候注意一下即可)



$\tilde{\hat r}=i\frac{\tilde v L}{\alpha}+e$　加~是提醒是复数量。这样就能很快得v_x、v_y。

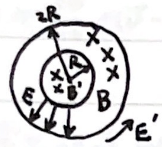
$\boxed{Ex}$ 卢瑟福散射：无穷远后$\hat r$、$\hat v$同向(来时反向)

$\tilde{\hat r}=\frac{e}{1-i\frac{v_0L}{\alpha}}$ 负幅角$\varphi=\tan^{-1}\frac{v_0L}{\alpha}$，(散射角$\pi-2\varphi$)

△ 天体：广泛（二）

> 径向微振（二）：有些时候能量并不守恒，有切向力（如感生电场）（常出现在磁场中）角动量

Ex 磁场+涡电微振： T2C2



内部调控磁场 $B'=B\cdot(\frac{r}{R})^2$，r为该时刻粒子距轴。
粒子最初以线速度 $\frac{qBR}{m}$ 在内外筒间匀圆运动
内外筒保持有一电势差 $U=\frac{qB^2R^2}{m}\ln\sqrt{2}$
求径向微振周期。

□ i（正则角动量）切向动力学方程 $\frac{dL}{dt}=E'qr+qB\dot{r}r$　$E'=B\dot{r}$

得 $mv_\theta r-qBr^2=Const$

ii 电场 $E_{(r)}=\frac{qB^2R^2}{2mr}$　$U_{(r)}=\frac{qB^2R^2}{2m}\ln\frac{2R}{r}$

iii 初态 $qv_0B-\frac{q^2B^2R^2}{2mr_0}=m\frac{v_0^2}{r_0}$，$r_0=\frac{3}{2}R$

$Const=-\frac{3}{4}qBR^2$.

iv（原能量）径向动力学方程 $m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=E_{(r)}q-qBr\dot{\theta}$

涡旋电场虽做功，但有效势能此处已改变。

代入$\dot{\theta}$，对r在r_0附近展开/求一阶导（直接关注一阶项）（推荐）

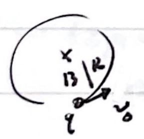
$\ddot{r}+\frac{2}{9}\frac{q^2B^2}{m^2}\Delta=0$　$T=\frac{3\sqrt{2}\pi m}{qB}$.

* 结论：外部 一般 $E\propto\frac{1}{r}$ 有 $M=Const$（$\Delta L\propto t$）

而一般匀强磁场中（即使变有B）都得 $L-\frac{1}{2}qBr^2$（E、L'守恒场）

附：不是正宗的简谐运动，不要搞 $r^2\omega$ 逐渐守恒！

既然是径向微振，就回归径向牛二搞。再举一个熟悉的例子：



洛伦兹力圆周，径向微扰后：$L=mv_0R-\frac{1}{2}qBR^2=\frac{1}{2}qBR^2$

$\dot{\theta}=\frac{L}{mr^2}+\frac{qB}{2m}$

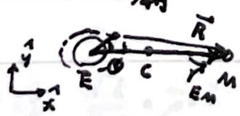
代入 $\ddot{r}=r(\frac{L}{mr^2}+\frac{qB}{2m})^2-\frac{qBr}{m}(\frac{L}{mr^2}+\frac{qB}{2m})=-(\frac{3L^2}{mR^4}+\frac{q^2B^2}{4m^2})\Delta$

$=-\frac{q^2B^2}{m^2}\Delta$

（更多相关内容见“受力解振动△”）

$\omega=\omega_0$ 在条里显然的。

> 潮汐再说明：解等势面（平衡潮）是完全正确的做法；有时还有另一种，考察地心系里的“引潮力”：$\vec{f}_{潮}=\frac{GM_m\Delta m}{R^2}\hat{R}-\frac{GM_m\Delta m}{r_{EM}^2}\hat{r}_{EM}$（地心加速度的惯性力），一阶展开后得 $\vec{f}_{潮}=\frac{GM_m\Delta m}{r_{EM}^3}(2r\cos\theta\hat{x}-r\sin\theta\hat{y})$（其实即$V_m$的一阶导得）

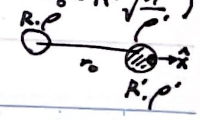


▷这种方式忽略了绕C，近似认为$f_{潮}$与地球万有引力下形成潮面。

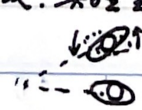
在V_E、V_M（没有$V_离$）下首阶近似亦可得到正确的潮高$h=\frac{3M_mR_E^4}{2M_Er_{EM}^3}$.

附带：关于洛希极限（撕裂），

可近似认为是 $f_潮$ + 自身自转离心力 + 自身万有引力 在$\hat{x}$方向 >0 导致撕裂。



总之，转动下的平衡尽量换进转动系做，实验室系下不存在$V_离$，但其是需要考虑环绕质心转动动能的。



△ 绳链

方法理论上都在其它地方有了，但作为柔性物体，相关题目仍然具有较明显的特征.

> 冲拉：一般能量不守恒，应用动量定理积分式可解决.（密舍尔斯基方程）

$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v}-\vec{u})\frac{dm}{dt}$ 　$\vec{u}$ 　$\vec{v}$

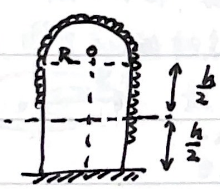
$\vec{u}=0$ 时 $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$ 　绳上拉

$\vec{u}=\vec{v}$ 时 $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ 　绳下冲（D没有 λv^2!）

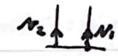
常见的是 $w = xv$ 换元或解一阶非齐次微分方程.

> 滑移：通常是带半圆的柱体类型，链条受外力移动，这时基本上可以能量得到 v, a. 若是整体受力，可以表达出 $\ddot{x}_c$, $\ddot{y}_c$；若研究分布便可微元分析.
（受力作用点可能还需要力矩，即角动量）

$\boxed{\text{Ex}}$ 模型不考虑链条腾空： 　　T2C2



柱、链质量皆为 m，地面 μ.
链柱间无摩擦，从 $\frac{h}{2}$ 处微扰下滑.
求参数条件，使得
(1) 柱能滑 (2) 柱能向一侧倾倒
(3) (1),(2) 都满足时，先滑后倒.



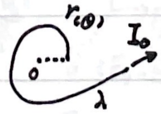
$$\begin{cases} f = ma_{cx} \\ N_1+N_2 = 2mg + ma_{cy} \\ \frac{d(mvR)}{dt} = 2x\lambda gR - hf + R(N_1-N_2) \end{cases}$$

☆ N 及其作用点可以等效为我们感兴趣的两点的作用力 N_2（取决条件在这里）

(1) $f \geq \mu(N_1+N_2)$，$x=\frac{h}{2}$ 最易，$\mu \leq \frac{h}{2\pi h+\pi^2 R^2}$ 　(2) $N_2 \leq 0$，$x=\frac{h}{2}$ 最易，$R \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\pi}h$

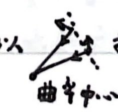
(3) 临界 $f = \mu(N_1+N_2)$ 　$\mu < \frac{R}{h}$.
$f = \frac{R}{h}(N_1+N_2)$

> 连续体分析：以冲击软绳为例.



求绳上速度分布 $\vec{u}_{(\theta)}$

绳不可伸长 —— $\frac{du_\tau}{ds} - \frac{1}{\rho}u_n = 0$ ⟶ 可以



推，也可以由 $\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)^2 = 0$

即 $\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{d\vec{u}}{ds} = 0$
$\hat{\tau} \cdot \frac{d\vec{u}}{ds} = 0$ 得

冲击（矢量式）—— $\frac{d(I\hat{\tau})}{ds} = \lambda\vec{u}$

$\Rightarrow \frac{dI}{ds} = \lambda u_\tau$，$I \cdot \frac{1}{\rho} = \lambda u_n$

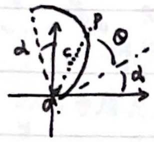
结合得 $\frac{d^2I}{ds^2} = \frac{1}{\rho^2}I$ —— $s_{(\theta)}$, $\rho_{(\theta)}$ 由轨道得到，可解 $I_{(\theta)}$.

△ 内启动

考察的体系通常与外界孤立（如光滑水平面上），内部有机制提供能量，比如小虫。最为关键的就是角动量守恒。之后有的求位形参量、路程，做坐标、求导、积分；有的结合转系做力学分析、受力和加速度。

Ex 光滑不定轴转动：  盘 m.R. OA 曲线 $r=\frac{2R}{\pi}\theta$ 小虫 m 沿 OA 爬行，求： (1) 全过程盘转角. (2) 小虫对地的轨道与程. T2C1

□ ☆定好坐标，列出角动量并联。题目便做好了一半。



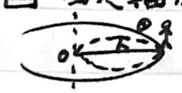
设 P 相对坐标 θ. α 为盘转角. 连线总转角 $\theta+\alpha$.

▷ $\frac{1}{2}mR^2\dot{\alpha}+2m(\frac{r}{2})^2\cdot(\dot{\theta}+\dot{\alpha})=0$

于是整个位形都可以由 θ 描述了。　　例如用 $a_\tau=2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi}$ 计算 a. F;

质心不动，地系的考察就可以以 C 为极坐标 $(\frac{r}{2},\theta+\alpha)$ 进行。　积分计算路程等…

Ex 固定轴的转系分析： T1C2

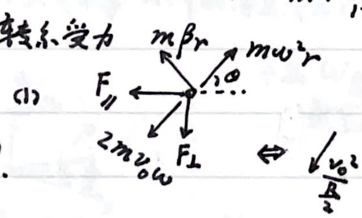


盘 M.R. 可绕 O 轴转动. 人 m. 小人相对盘以 v_0 作 $\frac{R}{2}$ 匀速圆周运动. θ 表示小人角位置. 求：
(1) θ 时人对盘的作用力.
(2) $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时撤去 O 处转轴，保持人相对盘规律不变，求盘心加速度.

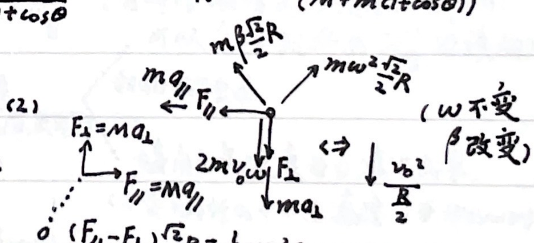
□ 角动量守恒 $\theta\sim\omega\longrightarrow 0=-\frac{1}{2}MR^2\omega-m\omega R^2(2+2\cos\theta)+mv_0R(1+\cos\theta)$

$\omega=\frac{v_0}{R}\cdot\frac{m}{m+\frac{M}{1+\cos\theta}}\Rightarrow\beta=\frac{v_0^2}{R^2}\cdot-\frac{2mM\sin\theta}{(M+m(1+\cos\theta))^2}$

转系受力

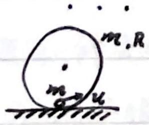


再列解即得。



$(F_{//}-F_\perp)\frac{\sqrt{2}}{2}R=\frac{1}{2}MR^2\beta$

但也有些情况不是角动量守恒，而是角动量定理了。比如立在地上的环与虫。这其实更偏近于动力学分析，除了最开始启动是用了一下守恒。

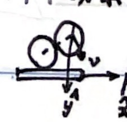
Ex 

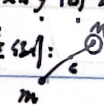
m.小虫以恒定 u 相对 m.R 环上爬. 地面光滑. 求 u_{min} 虫能到达圆心等高处.

□ (对 C) $\frac{dL_c}{dt}$. N 再用 a_{cy} 平动解.

$\Rightarrow u_{min}=\sqrt{3gR}$.

□ 若地面足够粗糙？$\Rightarrow u_{min}=\sqrt{gR}$.

附：在质心系里的能量（$\frac{1}{2}\mu v^2$）和角动量（μvR）可以用二体来写（考试不建议），但注意二体只包含了质心所在方向的平动动能，不涉及转动；若取只是质心 $\hat{x}$ 向平动系，则 $\hat{y}$ 向动能仍是 $\frac{1}{2}mv_y^2$（即动的那个）。总之，干脆每次老实画一遍得了。 

举例： 

$\begin{cases}E_k=\frac{1}{2}\mu v^2+\frac{1}{2}I\omega^2\\ L=\mu vR-I\omega\end{cases}$

△ 刚体：运动学（一）

> 坐标求导：

常见于杆系的问题，选取好直角/极坐标后求导。如  求a_P。

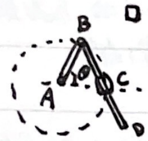
但并不是都要从坐标开始，速度的分析很多时候是熟稔的，可能加速度可以用之求导。（当然这时候v要带参$v(\theta)$）

Ex 筒与杆、地面均保持纯滚。

A端以匀速v_0向左，求60°时：杆、筒的角速度、角加速度。　　T1C2

□ 令$60°=\theta$，求出ω后则$\beta=\frac{d\omega}{d\theta}\cdot\omega_1$即可。　⇒ $\omega_1=\frac{v_0}{3r}$　$\omega_2=\frac{v_0}{3r}$

$\beta_1=-\frac{2\sqrt{3}}{27}\frac{v_0^2}{r^2}$　$\beta_2=\frac{4\sqrt{3}}{27}\frac{v_0^2}{r^2}$



Ex B铰接，AB杆长r绕A匀速ω转，位置用θ。

BD杆长$2r$，穿过固定于C的光滑套筒，求：(1) D点v_D、a_D　(2) θ时维持的力F。

杆质量m、$2m$，现施于B点驱动力垂直于AB杆。

□ 以C为原点，建极坐标。$r_D=2r(1-\sin\frac{\theta}{2})$ ⇒ $a_{D\theta}=-\omega^2 r\cos\frac{\theta}{2}$，$a_{Dr}=\frac{\omega^2 r}{2}(2\sin\frac{\theta}{2}-1)$

(1) 

质心令为P。$r_B=2r\sin\frac{\theta}{2}$，$r_P=r(1-2\sin\frac{\theta}{2})$

平动 $v_P^2=\dot{r}_P^2+r_P^2(\frac{\dot\theta}{2})^2$。

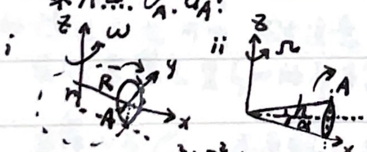
(2) 则 $F\omega=\frac{d}{dt}E_k=m\cdot\frac{dv_P^2}{dt}=-\frac{1}{2}m\omega^2 r\cos\frac{\theta}{2}$。→ 转动动能不变。

（见后页）

> 转系/换系分析：

这个渗透在很多的地方，通常是刚体角速度复杂，非平面运动，位形参量不明晰的时候（可以自己设转角θ、φ，但麻烦耗时）一种是下面例子里的：求$\vec{v}$、$\vec{a}$，绝对（对地）常取公转系（剩下一个自转角速度），相对〈相减 / 矢量求导　核心：刚体的角速度为$\vec{\Omega}+\vec{\omega}_自$　（有时候刚体是线接触（瞬轴）可以直接判断出$\vec{\omega}_总$沿该向）

Ex 求A点v_A、a_A：



求出$\omega_自$（角速度关联）〈 利用几何合成 / 接触点速度为0表达出来。（不要搞什么中心点速度等于什么ωr）

□ ⇒ $a_A=\omega^2\frac{r^2+R^2}{r}\vec{j}-\omega^2R\vec{i}$　$a_A=-\frac{\Omega^2 h}{\sin\alpha}\vec{k}-2\Omega^2 h\cos\alpha\,\vec{i}$

只展示一下"矢量求导"的方法，以ii为例：$\vec{a}_{A\to O}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}'\times\vec{OA})=(\vec{\Omega}\times\vec{\omega}')\times\vec{OA}+\vec{\omega}'\times(\vec{\omega}'\times\vec{OA})=\dots$

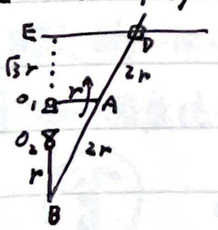
$\vec{\omega}'=\vec{\Omega}+\vec{\omega}_自=-\frac{\Omega}{\tan\alpha}\vec{i}$　（O是锥底中心）

（$\vec{a}_O=\dots$ 可验证$\vec{a}_A$）

▷ 注意只有当$\vec{\omega}'$与$\vec{OA}$垂直才等于$-\omega'^2\vec{OA}$，不要太急了。

还有一种是杆系的问题。

Ex 只能水平移动的套筒：　　T2C1



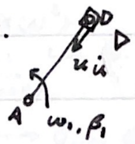
EF有个D套了杆，EF只能左右移。

O_1A以匀速ω_0转，求图示时刻：　(1) v_B、a_B　(2) v_D、a_D（即EF杆）

△ 刚体：运动学（2）

□ 杆系题最多的就是取杆上两点（以及杆上的套筒）做分析（不可收缩，通常是条件），称作"极式系"，即θ转（当然还有a）系中只有r方向速度$\dot{r}$，$\ddot{r}$（比如套筒）。

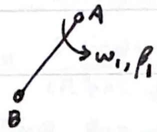
还有一个关键就是"设一解二"。（这里这个思想不是很明显）



▷ D沿杆向的速度加速度u，$\dot{u}$未知，但可列D点水平竖直条件解出$a_{D//}$（a_D），$v_{D//}$（v_D）。（竖直→为0）

☆ D沿杆方向移动着，不要想当然认为杆上D与套筒D水平速度相同。

☆ "极式系 ⟺ 地系（真实情况）"对应得解。（更多见"考试后记小点（1）□"）



∑ (2) $v_D=\frac{2}{3}\sqrt{3}\omega_0 r$　(1) $v_B=\sqrt{3}\omega_0 r$

$a_D=(4\sqrt{3}+\frac{1}{3})\omega_0^2 r$　$a_B=3\sqrt{5-2\sqrt{3}}\omega_0^2 r$

> 维持所需F、M：能量　（Fv、$M\omega$）用做功的角度，表达出动势能求导即可／角动量　利用$M=\frac{dL}{dt}$得（如$\vec{M}_0=\vec{r}\times m\vec{a}_c+I_c\vec{\beta}$）

某些动力学色彩的题目也可以不必，如

可以直接列M ↗ → 具体看题哪个E or L更好算

▷ 有时注意，分离体要考虑飞出的部分存在的dE、dL；用E时注意有无其它输入。

> 瞬心／曲率半径：

曲率半径的计算及与振动相关见"能量解振动（2）△"，这里讲一些刚体相关的。通常$M=I_c\beta$用在质心上；有时一些定轴了的转动，会用$M=\frac{dL}{dt}=\frac{d(I\omega)}{dt}$；有时候不是真绕着它转，会写成$\vec{M}=\vec{r}\times m\vec{a_c}+I_c\vec{\beta}$；还有一个就是瞬轴，$M_p=I_p\beta+\frac{1}{2}\omega\frac{dI_p}{dt}$，这里$I_p$的瞬心P是非刚体视角里的（具体理解见例题）▷ 速度瞬心，定义为刚体上或刚体延展空间里速度为零的点。刚体的运动可以描述成绕相对自身固定的轴转动和该轴相对某系的运动。注意，对瞬心通常不要用$M=\frac{dL}{dt}$相关解决。如果只是求β，不如由ω求导。（更多强调见"刚体：冲撞…△"）（除了这个要换系外，其它均是对空间固定点。！）

*补惯性力也可以，不过注意这时考察L里$I_p\omega$的I_p无需求导，写作$M_p-\vec{r_c}\times m\vec{a_p}=I_p\beta$。

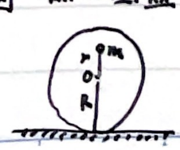
瞬心求ρ：点与瞬心的连线可以帮助找到$\hat{n}$的方向，但ρ不是它们的距离！瞬心也具有加速度。① 直接看"真"加速度，不要管瞬心，得到$\vec{a}$后再向$\hat{n}$投影。
② 相对瞬心都是$\vec{a}=-\omega^2 l\hat{n}+\beta l\hat{\tau}$（▷注意，$l$不考虑$\dot{l}$、$\ddot{l}$！因为瞬心是固连在刚体上的）然后求出$\vec{a_p}$，叠和起来求$a_n$。

瞬心求β：用上面所说的 ① 瞬时轴转动定理（转动瞬心） ② +惯性力矩（速度瞬心）（例子见下）

但实际题目通常建议能量ω求导。当然有时任意性设起来会极难求导，那就动力学。

当然，瞬心用的最多的应该还是运动分析，快速得到某点速度$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$，以及最高点、最低点（$\vec{v}$水平即$\vec{r}$竖直）对应位置（$\vec{r}$）的判断。

Ex 偏心圆盘纯滚：　T2C2

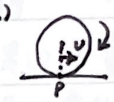


R，质量可略盘上$\frac{R}{2}$处固定一m质点。从最高处微扰滚下，地面足够粗糙。

求 (1) m至最低处时地面的作用力
(2) m至O等高处的曲率半径。
(3) ρ_{min}

△ 刚体：运动学（三）

□ (1)（虽然不需要）*感性结论：最低/高处没有β.（←力矩）


（1）

$v=\sqrt{4gr}$. $N-mg=m\omega^2 r$ ← “真”加速度. $\omega=\frac{v}{R-r}$.

$\Rightarrow N=mg\left(1+\frac{4r^2}{(R-r)^2}\right)$


（2）

(2) 能量 $\to \omega_{(\theta)} v_{(\theta)} \to \beta_{(\theta)} \longrightarrow a_{x(\theta)}, a_{y(\theta)} \to N, f, \mu$ 　*曲率半径不必算v,ω值.

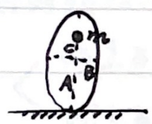
$\omega^2=\frac{2gr(1+\cos\theta)}{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}$ 　$\beta=\frac{gr\sin\theta(r+R)^2}{(R^2+r^2-2Rr\cos\theta)^2}$ 　$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{\omega^2(R^2+r^2)}{\omega^2 r\cdot\frac{r}{\sqrt{R^2+r^2}}}=\frac{(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2}$

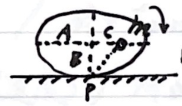
对O/对P都可得 　$a_x=(R-r\cos\theta)\beta-r\omega^2\sin\theta$ 　$a_y=-r\beta\sin\theta+r\omega^2\cos\theta$

$\Rightarrow \frac{f}{N}=\frac{r\sin\theta}{R-r\cos\theta}$ 　max时 $\theta=\arccos\frac{r}{R}$. $\mu_{min}=\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}$.

▷结论：“切式” 瞬心加速度都为向上的$\omega^2\rho$.

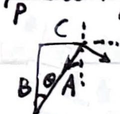
Ex 椭圆纯滚：（更多相关见“能量简振动(2)△”） 　T3C1



轻质椭圆焦点上固定一m.
A,B,C. 从竖直倒下，保持无滑，求  时地面的作用力.

□ 能量 $v=\sqrt{2g(A+C-B)}$. 瞬心P $\to \omega=\frac{v}{A}$. $a_p=\omega^2\rho_p=\omega^2\cdot\frac{A^2}{B}$

$mA^2\beta=(mg+ma_p)C$



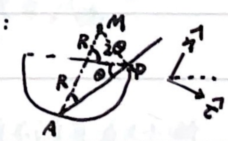
$a_y=a_p-\beta A\sin\theta-\frac{v^2}{A}\cos\theta$

$a_x=\beta A\cos\theta-\frac{v^2}{A}\sin\theta$ 　$\Rightarrow N=mg\frac{B^2}{A^2}$
$f=mg\frac{BC}{A^2}$

＞瞬心的加速度 Ex

杆长2R摆在R的光滑碗里.
$\angle OPA=\theta$. 从$\theta_0=\frac{\pi}{3}$下放，求θ时
杆瞬心M加速度$\vec{a}_{m(\theta)}$.

□ 能量 $\dot\theta^2=\frac{3g}{R}\cdot\frac{\sin 2\theta-\cos\theta}{8-6\cos\theta}$. M位置：



在刚体（杆延展空间里）看来，M应
保持距A $(2R,\theta)$ 随杆以$\dot\theta$旋转.
故M只具有旋转引起的加速度，再叠加刚体整体的加速度（平动）
$M\to A\to$地. 　（其实应说成对某点+该点对地）

$\vec{a}_{M(\theta)}=(-2R\dot\theta^2\hat{n}+2R\ddot\theta\hat{\tau})+(4\dot\theta^2R\hat{n}-2R\ddot\theta\hat{\tau})=2R\dot\theta^2\hat{n}$

△ 刚体：冲撞、释放 (一)

> 公式使用的提前量：

分析 v、a (关联) ⟸ 分析 F. I (运动方程)

▷区别在于：分析时冲撞没有恒定外力如 mg 项，而运动有!!
冲撞是设冲量 I.
释放即正常的刚体动力学，研究 F. a. β.
且有时带 μ.

i) 初态静止会简单点。如果有 v. ω，注意到关联(同归)时，$\omega^2 l$ 的存在!

ii) 不要随意取转系，大多无必要。β_1 β_2 (具体见后面) 取杆(β)时 ⊙↑ $\beta_1+\beta_2$!

iii) 方程选得好计算会更少 → 避开力很重要 { ① ⊥F ② 过力线的轴 M ③ 整体(内力)

☆ 如果挑了非质心的轴：

注意，不是定轴绕其转就没有 $I\omega$! 瞬心巧在地系里正好是 $I_p\omega$、$\frac{1}{2}I_p\omega^2$. 但只是这个时刻，下个时刻就没有这样表示，也无从 $M=\frac{d(I\omega)}{dt}$ 一说；刚体系里瞬心 $I_p\omega$. I_p 保持不变，但有惯性力 而在正圆 时无力矩，就很方便.

{ 地系点 → 冲量矩 $\vec{J}=\vec{L_c}+\vec{L}_{c\to 0}$ / $\vec{M}=\vec{r}\times m\vec{a_c}+I_c\vec{\beta}$

刚系点 → 附加 $\vec{r}\times m$(一该点获得速度) / 附加惯性力
(可以写 $I\omega$) (取它为系来的嘛) $\vec{M}-\vec{r}\times m\vec{a_p}=I_p\vec{\beta}$ (推荐)

iv) "脱离…"题目常见求法 (已知之前运动) { ① 假设不脱离时 N_x ② $(P_x)_{max}$ ③ a_{cx} 方向
* (判断撞后是否脱离) $e=0$ { t_0^+ 时刻速度变化 ($\Delta v=a\Delta t$) 假设沿靠求 N

v) "三全法" 三力汇交+全反力摩擦角：只做静力平衡! 一次判角得出!
即不涉及大小。如 附加了 mg 进行具体值二次运算，没法搞不如列解.

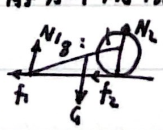
vi) 带 μ 的讨论题("某一条件")，先解滑的 ($\mu N=f$. $\mu I_n=I_f$)，代到另一条件等式给出 $\mu_{临}$，不滑的就是前面答案 μ 改为 $\mu_{临}$.

vii) 一些 Tip:

· $\omega_{(\theta)} \xrightarrow{导} \beta_{(\theta)}$，最好多次利用，且题目不涉及力大小时

· 前小问已经大量计算，后面似乎又来，问"如何运动…"，很可能是静止。("三全")

· 不要把动力学和静力平衡混用了! 只要在动，求什么力等第一应反应是"…定理"而非"$\Sigma F=0$, $\Sigma M=0$"。例如



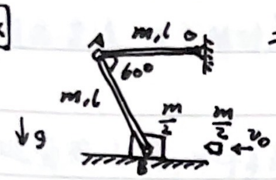
滑动减速情况下自然写出 $f_1=\mu N_1$, $f_2=\mu N_2$, $a=\beta r=\mu g$.
但不能随便得 $N_1=\frac{1}{9}G$, $N_2=\frac{8}{9}G$. 力矩平衡 $\Sigma M=0$
⇓改为
角动量定理 $M=\vec{r}\times m\vec{a_c}$

(实际上属于"平面平行运动"，对 c 列 $\vec{L_c}$ 也可以)

▷带转轮的尤其 $+\vec{L_c}$ 不要忘了!

△ 刚体：冲撞、释放（二）

Ex T2<3



子弹打进木块里. 地面粗糙. μ.

O为固定光滑轴. A.B处铰接.

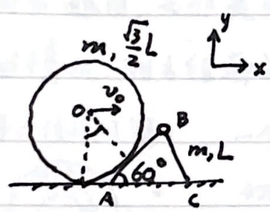
(1) 初始系统静止. 求水平面与物块间 μ_{min}

(2) 取 $\mu=\mu_{min}$. 求子弹射入后物块速度 v_B, OA.AB杆角速度 ω_1. ω_2.

(3) 接(2). 求 a_B. β_1. β_2 (用 ω_1. ω_2 表示)

$\omega_1=\frac{6}{61}\sqrt{3}\frac{v_0}{l}$. $\beta_1=-\frac{27}{61}\frac{g}{l}+\frac{2\sqrt{3}(9\omega_1^2-16\omega_2^2)}{61}$

Ex T3<3



俯视图. 无g.

AB.BC杆 m,L 铰接于B. 轻靠墙.

匀质圆盘O以 v_0 撞来.

忽略一切摩擦.

(1) 完全弹性碰撞. 求碰后杆角速度 ω. 圆盘速度 v_{ix}. v_{iy}.

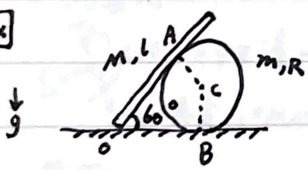
碰后A.C点无垂直墙速度.

(2) 判断ABC之后是否会脱离墙. 并求出AC相遇前瞬间 a_B.

$\omega=\frac{12\sqrt{3}}{47}\frac{v_0}{L}$

$a_B=-\frac{351}{4418}\frac{v_0^2}{L}\hat{y}$

Ex T2<2



$2\sqrt{3}R>l>\sqrt{3}R$. 实心圆柱.

(1) 系统能平衡. 求柱杆. 柱地. 杆地间 μ_{min}.

(2) 柱地间无摩擦. 柱杆间 μ. 杆地间足够大摩擦. 求静止释放瞬间. 柱.杆角加速度 β_1. β_2.

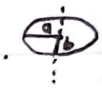
$\mu_{A\min}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\mu_{B\min}=\frac{Ml}{12mR+\sqrt{3}Ml}$

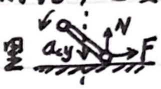
$\mu_{O\min}=\frac{l}{12R-\sqrt{3}l}$

$\mu<3\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时 $\beta_2=\frac{3(3-\sqrt{3}\mu)Mgl}{4[(3-\sqrt{3}\mu)Ml^2+36mR^2]}$

△ 刚体：平面平行运动

首先关注一下 I 的计算："各向分计"的思想 →  $I=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$.  $I=\frac{1}{4}m(a^2+b^2)$

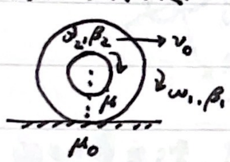
$\int x^2dm+\int y^2dm$ （常用！）

还有要注意，水平方向不受力时，体系的 v_{cx} 不变，是"真" v_{cx}. 取 C 平动系的话，C 要相当套在一个 $\hat{y}$ 的杆上。 计算动能等时不要差错，以及相应的功能原理  .

▷ "能越过上方…"： ×  ✓

大部分题目，无非是设力、动力学分析，得到 $v(t)$、$\omega(t)$，判断纯滚条件（自锁式），分析讨论运动情况。列方程都是 $\Sigma F=ma_c$、$\Sigma M=I\beta_c$.

Ex 舒力传典习题： T2C2



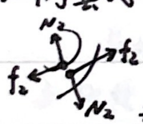
一个匀质圆盘，半径一半处切割成小圆盘与圆环（有缝隙点接触）初始通过打击获一平动速度 v_0. 环与地 $\mu_0=0.5$，环盘间为 μ.

求：(1) 之后运动中，环盘曾发生过相对滑动，μ 范围。
(2) 取 $\mu=0.2$，系统末速 v.

□

(1)

▷ "内套式" ◎ 接触点不一定在正下方！（如枪管里的子弹）



▷ 牛三请一定分开画清楚！ ⇒ $\mu<\frac{1}{\sqrt{19}}$

先令 $f_2=\mu N_2$ 代入临界条件 $\beta_2<\beta_1$.

(2)

▷ 对地面点的角动量守恒.
（计算末速常用） f 无矩

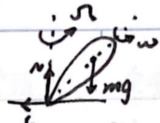
$v=\frac{2}{3}v_0$

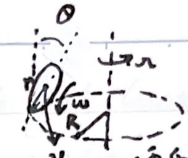
一些 Tip:

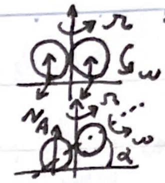
· 设 a、β 一定要注意列方程里的正负号，尤其是有多个运动阶段时，不要太快说把如"$f_1=\mu N_1$ … 改为 $a=-\beta r$ …"，检查不同运动阶段 a、β 等物理量方向的改变。

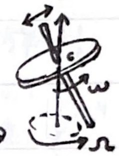
△ 刚体：进动

攒集的几个常见模型：

I. 
陀螺进动

II. 
硬币打转 (《静力》)

III. 
飓风球 (《CPHO-S 9》)

IV. 
(《回墙》)

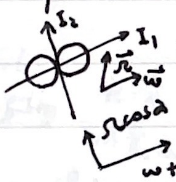
一般"应运而生"几个点：

① 关联、纯滚情况(如II.)接触点 $v=0$.

列 $\vec v_c+\sum\vec\omega\times\vec r=0$. 如II.处: $v-\omega r=\Omega r\sin\theta$ 而不是 ΩR!

(地面在动;) 取Ω转系即 $\Omega R=\omega r$. ($v=\Omega(R-r\sin\theta)$)

② 主轴分解. 一般可能有 $\Omega\ll\omega$, 但也许就是要求没有(如III.) (包括动能. 见下面回)


找到对称性较好的主轴. I_1, I_2 一般对C而言.
将1.2方向总角速度分别乘以 I_1. I_2 再合成 $\vec L_{总(c)}$ (不过一般都直接算 L_z or $L_{//}$)

一般还有一个可能近似是 $v_c^2\ll Rg$. 决定了 $\vec a$ (即该项)的考虑.

③ 角动量定理. 解题核心. $\vec M_c=\frac{d\vec L_c}{dt}$ (若对C:). $\vec M=\vec r_c\times m\vec a+\frac{d\vec L_c}{dt}$. 看清楚原点是哪! (常质心运动定理把力换至公轴)

④ $\vec f$ 是否有? 方向? 滑动/纯滚要分清. Check: I. II. 静 III. 滑. 方向需要讨论ω~Ω. IV. 滑. 方向需要讨论,

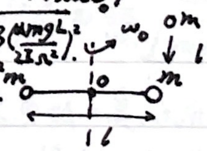
ω小时 f τ_f 下倾. ω大时 τ_f f 扶正.

与此同时, 就可以问状态间的时间关系或t时刻状态.

如IV.处: $\tau_f=-L\frac{d\theta}{dt}$. III处:

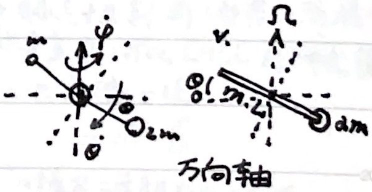
(已知μ) $\begin{cases} f_A,\ f_B\sim\frac{d\Omega}{dt} \\ f_A,\ f_B\sim\frac{d\omega}{dt}\end{cases}$ (N_A. N_B 由③) ⇒ $\Omega(t)$, $\omega(t)$, ...

附: II. θ为小角. ⇒ $\theta\approx\frac{3v^2}{2gR}$. v(右) (转动定律) θ处微振. ⇒ $\omega=\Omega\sqrt{1+3(\frac{mgL}{2I\Omega^2})^2}$ ($\Omega\sqrt{1+3\sin^2\theta}$) $I=(\frac{1}{12}+\frac{\alpha}{4})mL^2$



当然还有一些动力学色彩更浓的题 Ex 三维空间转动: T2<2

(此处③ 可以理解为角动量守恒, ④ $\vec f$ 被O处轴给拿掉了. 自由演化) ("万向轴承")



万向轴

l 轻杆两端连m小球. 初始水平绕正中O轴转. $\omega_0=\frac{2\pi}{\sqrt{l/g}}$.
另一m球从 l 上方下落与下方m球发生完全非弹性碰撞.
求 (1) 2m 高度变化范围. (2) 2m从最低点上升至最高点用时.

□ $\vec L$ 在 L_z 上守恒 + E守恒 ⇒ $\dot\theta_{(\theta)}$ (1) 令为0. (2) 积分.

②→

$(I=m(\frac{l}{2})^2+2m(\frac{l}{2})^2=\frac{3}{4}ml^2)$

$$\begin{cases}\dot\varphi I\cos^2\theta=\text{Const}=I\dot\varphi_0 \\ \frac{1}{2}I\dot\varphi^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}I\dot\theta^2-mg\frac{l}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}I\dot\varphi_0^2+\frac{1}{2}I\dot\theta_0^2\end{cases} \Rightarrow \dot\theta_{(\theta)}$$

(可以直接把碰撞也纳入进来. $I\dot\theta_0=m\frac{l}{2}\sqrt{2gl}$. $I\dot\varphi_0=I\omega_0$) (瞬轴永远通过的点)

通常是平衡态.
若运动即联系E解 $\dot\theta$;
还有一类是微振动,
重力矩在补偿完回转力矩后多出来 $I\ddot\theta$.
注意待偿M中几会因如 L_z 守恒随变.

☆ ▷ ③' 再论角动量定理. 一般考察的都是定点转动. 都可表示成对该点 $\vec M=\frac{d\vec L}{dt}$ ($\vec L=\overleftrightarrow{I}\vec\omega$ 自+公)
该点常给予力(非M). 这里(常为公轴点)亦有②主轴分解.(多半无必要换至C上做, 对C不好考察. 但似II等例外)

△能量解振动(一)

有一些 U_{eff} 相关的见"天体:广延△". 单变量描述体系. $Const = \frac{1}{2}\square\alpha^2 + \frac{1}{2}\bigcirc\dot{\alpha}^2$.

> 平衡稳定性: $\left.\frac{d^2E_p}{dq^2}\right|_{q=q_0}$ $\begin{cases} >0 & 稳 \\ =0 & \\ <0 & 不稳 \end{cases}$

$=0$ → 一阶判别: $\left.\frac{dE_p}{dq}\right|_{q=q_0^+} >0$, $\left.\frac{dE_p}{dq}\right|_{q=q_0^-} <0$ 稳, 否则不稳

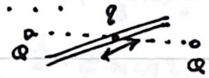
高阶判别: 至 $\frac{d^nE_p}{dq^n} = a \neq 0$ $\begin{cases} n奇 & \forall a 不稳 \\ n偶 & \begin{cases} a<0 & 不稳 \\ a>0 & 稳 \end{cases} \end{cases}$

▷ E_p 应理解为有效势能, 即表达式里除去 $\frac{1}{2}\bigcirc\dot{\alpha}^2$ 剩下的.

> 振动周期: $\omega = \sqrt{\frac{E_p''}{m}}$ $\left(\sqrt{\frac{E_p''}{m^*}}\right)$ (力然后一次导也可)

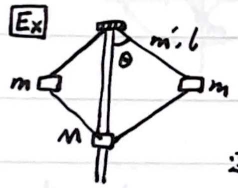
尽量能不展开就不展开, 直接求二次导. (尤其是静电)

注意有时 ω 定, 有时是 L 守恒.



大部分题要么 E_p 难算, 要么 E_k 难算; 可能出现比较困难的几何.

Ex



T2C3

光滑. 上端固定.

M 套在竖直杆上, 用 m', l 的杆连上 m. 初始系统绕杆角速度 ω_0.

(1) 初始时 θ_0

(2) 给一微扰, 求振动周期.

□ ▷ $E_{离}$ 等 $\propto r^2$ 不要下意识、等效在质心!

$I = 2ml^2\sin^2\theta + 4\cdot\frac{1}{3}ml^2\sin^2\theta$.

$E_p = -2mgl\cos\theta - Mg2l\cos\theta - 4m'gl\cos\theta$

$E_K = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2(m + \frac{2}{3}m'(1+3\sin^2\theta) + 2M\sin^2\theta)\cdot 2$

$U_{eff} = E_p + \frac{L^2}{2I}$

(1) $\frac{dU_{eff}}{d\theta} = 0 \Rightarrow \cos\theta_0 = \frac{m+2m'+M}{m+\frac{3}{3}m'}\cdot\frac{g}{\omega_0^2 l}$

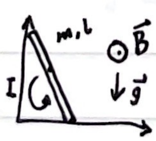
(2) $U_{eff}''\big|_{\theta=\theta_0}$ ($L = I_0\omega_0$ 代入) $\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m^*}{U''}} \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega_0}\sqrt{\frac{m+2M\sin^2\theta_0+\frac{2}{3}m'(1+3\sin^2\theta_0)}{(m+\frac{3}{3}m')(1+3\cos^2\theta_0)}}$

如果出现这类经典的题, 注意写法的综述性, 条理清晰.

有时题目要求讨论平衡位置及其稳定性, 临界点往往需单独一类. 之后求其振动周期还可能会出现非简振. 如 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ 等椭积. ($\frac{1}{2}\bigcirc x^4 + \frac{1}{2}\square\dot{x}^2$)

↳ 稳定性判断(即若二阶展开求导复杂)可以 CALC 看附近值.

E_p 的表达很广. 例如



金属杆通有恒定 I.
求平衡位置及其附近振动周期.

□只需添一项
$-\vec{m}\cdot\vec{B}$
(恒定磁矩在外磁场)
(不论及电源作功)
↓
挑选方法:
想要用其表式的磁力是 $-\nabla W$ 还是 ∇W (另外再去计及)
(通常)

△ 能量解振动(2)、曲率半径

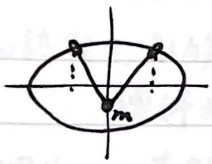
> 曲率半径相关：有时有涉及平面曲线的振动，这里有一个"潘索定理"，  运动 可以近似为两个各自曲率半径的圆。还有一个等效的"摆长"概念也很常用。

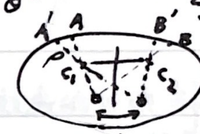
Ex  a.b.椭圆，绕滚微振：$l=\rho-b=\frac{a^2}{b}-b$. ▷ 注意：转动动能 $E_k=\frac{1}{2}I_p\dot\theta^2$

 $T=2\pi\sqrt{\frac{I_c+mb^2}{l}}$ $\dot\theta$ 是自转角速度！  $\dot\theta^2$

（$\frac{v_c}{r}$ 那个）

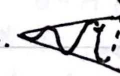
Ex  固定 ⇒  $mg(\frac{2A^2}{B}\cos\frac{\theta}{2}-B\cos\theta)$ + $\frac{1}{2}(\frac{1}{4}m(A^2+B^2)+mB^2)\dot\theta^2$ $T=2\pi\sqrt{\frac{B(A^2+5B^2)}{2g(2B^2-A^2)}}$

Ex  $a=\frac{3}{2}l$, $b=\frac{\sqrt3}{2}l$，光滑。
平衡时环位于焦点正上方。
求在椭圆平面内(左右)微振周期。

□ 
曲率中心 C_1, C_2。
C_1, C_2 是 m 运动的焦点。

$T=\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{2l}{g}}$ ◁ "摆长" $l=\frac{\frac{L}{2}}{\cos\theta}-\rho$.
其中绳长 $L=2\sqrt3 l$，$\theta=30°$（条件解得）
注意是 $\frac{v^2}{a_n}$，不是 $\frac{v_n^2}{a}$！

★ 求曲率半径：
① 代公式 $\left|\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-x''y'}\right|$ $x(t), y(t)$ 型，$\left|\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''}\right|$ $r(\theta)$ 型
② 设运动

设法：I. 配套的常见运动  抛物  简振
II. 一般常轨道就设匀速 

得 a_n：I. 运动学分析，如转系。
II. 解析求导（推荐）$\begin{cases}\ddot x\\ \ddot y\end{cases}$ $\begin{cases}\ddot r-r\dot\theta^2\\ 2\dot r\dot\theta+r\ddot\theta\end{cases}$ ↗ $a_\tau=\frac{\vec a\cdot\vec v}{|\vec v|}$，更杂时 $a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}$.

不仅仅是运动，凡是涉及切点附近小量近似的，很可能都是直接用 ρ 圆（一二阶都正确）尤其是椭圆顶点。例如干涉条纹  ⇒  （两倍！半波损！）

▲ 受力解振动(一)

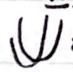
> 洛式振动：除了一个简谐正常的正比回复力 $-\omega_0^2\vec{r}$ 以外，还受到一个与速度叉乘正比的力。如洛伦兹力 $q\vec{v}\times\vec{B}$ 和科里奥利力 $2m\vec{v}\times\vec{\omega}$.

（关于受迫、阻尼的见"振动：广泛"）

何处可见：磁电共振：先有回复性电场，随后旋转或如何提供磁场（一阶!），简振性质发生变化.

注意正负的独立性!

这里 x.y 中都是 $-gax, -\frac{ga}{2}y$!

解析型旋转：解析面转动.  $z=\frac{a}{2}x^2+\frac{a}{2}y^2$ 旋转简振不变.  $z=\frac{a}{2}x^2-\frac{a}{2}y^2$

在一定 ω 旋转下，能够使振动性质变为稳定.

傅科摆：单摆所在线旋转(进动)　　塞曼效应的经典解释（洛科等效）：35届复五.

基本理论：① 直解

（较推荐）令 ω_0, ω_L 后 $\begin{cases}\ddot{x}+\omega_0^2 x-2\omega_L\dot{y}=0\\ \ddot{y}+\omega_0^2 y+2\omega_L\dot{x}=0\end{cases}$

代入解 ⟶ 在复杂或不对称时使用（如马鞍面）：令 $x=Ae^{i\omega t}$, $y=Be^{i\omega t}$ 代入. 得 AB双元方程组. 行列式为0 解出ω. 再看初值.

令 $z=x+iy$ ⟶ $\ddot{z}+2i\omega_L\dot{z}+\omega_0^2 z=0$

特征方程知 $\omega=-i\omega_L\pm i\sqrt{\omega_0^2+\omega_L^2}$.

$z=Ae^{\omega_1 t}+Be^{\omega_2 t}$ 看初值.

I. 有些时候（可能是磁电共振），ω_0^2 前可能是负的（排斥力），但洛伦兹力（或科氏力，亦即旋转）可以收束. 此时收束（稳定）条件为 $\omega_L^2>\omega_0^2$. 洛伦兹力即 $\frac{e^2B^2}{4m}>\omega_0^2$.

II. 代入解会解出 $\omega=\pm\omega_L+\sqrt{\omega_0^2+\omega_L^2}$ 注意这与 $-\omega_L\pm\sqrt{\omega_0^2+\omega_L^2}$ 是等效的.（负号可由系数修回）

② 洛科等效（以电子为例）

$\vec{F}=-m\omega_0^2\vec{r}-e\dot{\vec{r}}\times\vec{B}$

换至 $\omega_L=\frac{eB}{2m}$ 同 $\vec{B}$ 向转系.

$\vec{F'}=-m\omega_0^2\vec{r'}-e\dot{\vec{r}}\times\vec{B}+m\omega_L^2\vec{r'}+2m\dot{\vec{r'}}\times\vec{\omega_L}$

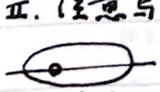
$\vec{\omega_L}\times\vec{r'}+\dot{\vec{r'}}=\dot{\vec{r}}$ ⟹ $\vec{F'}=-m(\omega_0^2+\omega_L^2)\vec{r'}$.

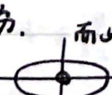
 再由旋转坐标变换变回. 将之积化和差. 便会有 $\sqrt{\omega_0^2+\omega_L^2}\pm\omega_L$ 频率模式（算上z向 ω_0 即塞曼分裂）

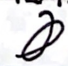
☆ 结论完全可以记住：$\sqrt{\omega_0^2+\omega_L^2}\pm\omega_L$.　　（举个例子，若平白无辜换系，$\omega_0^2$ 需算上离心力 $\omega_0^2-\omega_L^2$ 则就是 $\omega_0\pm\omega_L$，合情合理）

回复(ω_1)　　轴的转动

III. 注意与 ω_r 相区分.

 天体里 ω_r 即 ω_1　$\Omega=|\omega_r-\omega_0|$

 而此节讨论的是 $-k\vec{r}$.　$\omega_r=2\omega_1$ ($\Omega=|\frac{\omega_r}{2}-\omega_L|$)（轴转动）

注意进动应指 轴转与自转角频率之差!  ($\Omega=|\omega_1-\omega_L|$)

（ω_0 即原围振，对应 ω_L —展开角速度）　附：半之可以解得 $\omega_r=\sqrt{3+\alpha}\,\omega_0$.（其中 $F(r)\propto r^\alpha$）

△ 受力解振动(2)

(接)洛式)　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　以 r,θ 的视角.

直解(解析)通常出现在不对称的、各类情形下，直角坐标的视角；EL往往在有心场里.

③ 能量(正则角动量守恒)　　磁场B等于给出了正则角动量守恒 $mv_\theta r+\frac{1}{2}qBr^2=Const=L$

$$E=\frac{1}{2}m\omega_0^2r^2+\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\theta^2)=\frac{1}{2}m\dot r^2+\frac{1}{2}m\left(-\frac{qBL}{m^2}+\frac{L^2}{m^2r^2}+\left(\frac{q^2B^2}{4m}+\omega_0^2\right)r^2\right)$$

(当然，ω_0^2 可能是负的)　　有效势能 $U_{eff}=\frac{1}{2}m\left(\frac{L^2}{m^2r^2}+\left(\underbrace{\frac{q^2B^2}{4m}}_{\omega_L^2}+\omega_0^2\right)r^2\right)$

平衡位置 r_0 有 $U'_{eff}=0 \Rightarrow r_0^4=\frac{L^2}{m^2(\omega_0^2+\omega_L^2)}$

稳定振动 $U''_{eff}(r_0)=\left[\frac{6L^2}{m^2r_0^4}+2(\omega_0^2+\omega_L^2)\right]\cdot\frac{1}{2}m=m\cdot4(\omega_0^2+\omega_L^2)$　要求 $\omega_0^2+\omega_L^2>0$.

▷ $\omega_r=\sqrt{4(\omega_0^2+\omega_L^2)}=2\omega_1$　注意，有效势能解的是 r，这是径向振动.

简振场里 ω_r 相当于来回一次有两次.

就实际意义而言，ω_r 是实打实的径向，

如题问"能回到原点的条件…"比如还有一个普通的z向振动 ω_z，那么条件就应该是 $n_1T_r=n_2T_z$ 或 $n_1\omega_z=n_2\omega_r$. $(n_1,n_2\in N^*)$　ω_1 都不如 ω_r 在题目里反映得明显.

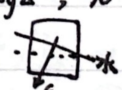
> 浮力振动　：其实主要是浸水部分的几何分析和字母运算.

亦有浮心、浮力势能的办法，但不必要.

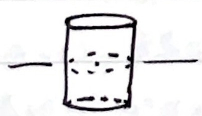
比较统适性的做法是①写出浮心与重心在水平方向的差值

$\Delta=x_F-x_G$.　$\Delta=0$ 即为平衡位置，$\Delta'><0$ 可以判断稳定性.

(这是左右振的情况，浮力=重力mg，回复力就 $mg\Delta$；若是上下振是简单的)

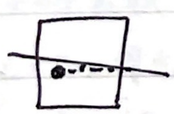
可以歪过来，把东西摆正，可能会好算一点. 

举例子：

Ex 　圆柱 r,h,ρ_1　　T1C2 □ ▷  注意不要等效在质心、积分算.

水 $\rho_0=2\rho_1$.　　$\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{3g}{4}\cdot\frac{2r^2-h^2}{3r^2+h^2}}$　$(h<\sqrt{2}r)$

求左右微振频率(给出稳定的条件)

Ex 

正方形木块. $\rho=\alpha\rho_0$ $(0<\alpha<\frac{1}{2})$　　T2C3 □ 写出 Δ, Δ'.

设水面与其边夹 θ. $(\theta\le\frac{\pi}{4})$

求平衡位置(稳定的) θ 与 α 的相应范围

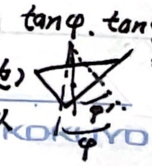
(即 $\theta_{(\alpha)}$，分浸1边和浸2边讨论)

☆ 提示：不仅仅是这里的 Δ.
还有 E_p' 等等，"$\Delta=0$，判 $\Delta'\gtrless0$"
的，尽量将 Δ 化作(多选)乘积
形式 $\Delta=uv$，$\Delta'=u'v+v'u$.
判 Δ' 要么 $u'v$，要 $v'u$，正交方便.

$\Rightarrow$

$$n=2\begin{cases}0<\alpha<\frac{3-\sqrt{3}}{6} & \theta=0\\ \frac{3-\sqrt{3}}{6}\le\alpha<\frac{1}{4} & \theta=\tan^{-1}\left(\sqrt{12\alpha-12\alpha^2-2}\right)\end{cases}$$

$$n=1\begin{cases}\frac{1}{4}<\alpha\le\frac{9}{32} & \theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{16\alpha}{9-16\alpha}\right)\\ \frac{9}{32}<\alpha<\frac{1}{2} & \theta=\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

① 更适合 . ② 写出浮心与重心相对中垂线的转角 $\tan\varphi$, $\tan\varphi'$.
更适合单个三角(一边 or 三边)  $=<>$
具体表征偏差关系的量可以灵活选择.

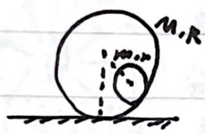
△ 受力解振动 (2)

> 刚体：振动

杆小是天生为能量法打造的，这里不提.

① 受力分析，解方程时面对 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 就可以开始思考阶数，进行舍去了，最后肯定是套到某个 $\ddot{x}$、$\ddot{\theta}$ 式里，都应只套一阶项.

② (不建议) $L=T-V$，出现的位形需(常为两个)变量描述，不考虑动力学上演化的关联，但运动学上(如纯滚)的关联还是要的。之后通常一个不含，$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=const$，代到要解的 $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}})=\frac{\partial L}{\partial \theta}$ 里.

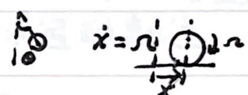
Ex 

M, R 环中有 m, r 实心圆柱，M 与地、与 m 间均足够粗糙，求振动角频率 ω.

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{R-r}\cdot\frac{4M+3m}{6M}}$$

T2C2

① 设 N, f.
▷ 注意分析小柱需要在环平动系里，有惯性力!

② 设 x, θ 

$\frac{\partial L}{\partial x}=0 \Rightarrow (\frac{3}{2}m+2M)\dot{x}+m(R-r)\dot{\theta}(\cos\theta+\frac{1}{2})=Const$

即 $(\frac{3}{2}m+2M)\dot{x}+\frac{3}{2}m(R-r)\dot{\theta}=Const$

再代入 θ 方程.

▷ 再说明：很多时候，这类不是只为振动准备的，它可能还要问释放(角加速度)、某位形速度及力学分析等等。①代表的力学方法可以求解 a, β，简便程度要看列法。对O? 对P?

② 代表的能量法 $E=T+V$ 可以得到位形间速度 ☆常用：f/I_f 对整体 + 对作用的单体

$\Sigma m a_x/\Sigma m v_x$

f/I_f { β/ω

联系 $\theta\sim\omega$，求导可以给出 $\dot{\omega}$，也包含了运动的全部信息.

(如振动到 ω^2 在 θ_0 附近近似，$\omega^2 \propto \Delta\theta^2$) 而主要问题

(正则守恒)

(常得到 ○ω+○′Ω=Const 令 Const=0 回代 E 即可)

是在于一个关联(○Ω 与 ○ω)，需要→之动力学分析的手段去寻找，当然，这也就可以使用 $L=T-V$ 得出，L 理论上也包含了全部信息。(常两个自由度，得到 { 关联 / 运动方程 } 代入，待解)

但 $(\frac{\partial L}{\partial \theta})=\frac{\partial L}{\partial \theta}$ 通常给的都是 $(\theta\ \omega\ \dot{\omega})$ 复杂微分方程，一种如果是求角加速度 (ω=0时)，能快速代解；求振动，快速近似出动力学标准式；还有一种是求 $\omega_{(\theta)}$，$E=T+V$ 更好，无需解这个二阶微分方程 ($f(t)$ 式的也用E)

☆ 思想：

① F. 牛二 ⇔ θ. ω, $\dot{\omega}$

② E. L ⇒ θ~ω → 求导

以及 ① 目不能用时 < E (约束力不做功) / L′ (约束力有力矩) (正则)

* E不守恒，那就 F.N. 列牛二，什么质心运动定理，转动、角动量定理都上。具体①②选择需统筹全题，尤其要会①的设法.

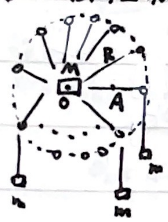
△ 平面n问题（一）

n问题就是物理量和过程带有n次、n个的问法，通常还附有$n\to\infty$的近似小问.

时序n问题大多思维上并不难，关键能否列出n至n+1的递推. 其次就是边界条件的确定，建议剥出第1个和最后一个过程直接分析双库条件. 再次就剩下数列的解决. 这一类就在相应内容的专题体现.

平面n问题是几何上的难点，也可以有"立体n问题"，只是代表一类求和的思想方法.

$\boxed{\text{Ex}}$ N向拉振： T3C2

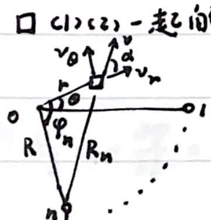


光滑桌面上有N个小孔（$N\geq 3$）分布在R圆周上. 连中心M与一m. 初态静止于圆心O

(1) 拉至r_0（$r_0\ll R$）的A释放 证明简振并求周期.

(2) 拉至r_0（$r_0\ll R$）的A，沿垂直OA方向一小v_0射出 求运动轨迹.

□ (1)(2)一起解答. 第一步先确定能量的基本思路.



$$\varphi_n=\theta+(n-1)\frac{2\pi}{N}$$

$$R_n=\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi_n}$$

▷（能量）振动p需要保留至二阶.

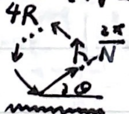
$$R_n\approx R-\cos\varphi_n r+\frac{1-\cos2\varphi_n}{4}\cdot\frac{r^2}{R}$$

$$E_p=\sum mg(R_n-R)$$

$$=-mgr\sum\cos\varphi_n+\frac{mgr^2}{4R}\left(N-\sum\cos2\varphi_n\right)$$

★ $\sum\cos\varphi_n=0$, $\sum\cos2\varphi_n=0$ 等

$\cos^2\varphi_n$化



注意N=2没有 $\sum\cos2\varphi_n=0$. 大部分题目应说$N\geq3$.

即 $E_p=\dfrac{Nmgr^2}{4R}$

$$E_K=\frac12Mv^2+\sum\frac12mv_n^2$$

$$v_n=v_r\cos\alpha+v_\theta\sin\alpha$$

▷（能量）振动 k中的v只需保留至一阶.

$$v_n\approx v_r\cos(\pi-\varphi_n)+v_\theta\sin(\pi-\varphi_n)$$

$$E_K=\frac12Mv^2+\frac12m\sum\left(v_r^2\cos^2\varphi_n+v_\theta^2\sin^2\varphi_n-2v_rv_\theta\sin\varphi_n\cos\varphi_n\right)$$

倍角. 代入★

$$E_K=\frac12Mv^2+\frac12m\cdot\frac{v_r^2+v_\theta^2}{2}\cdot N=\frac12\cdot\frac{Nm+2M}{2}v^2$$

则 $\dfrac{dE}{dt}=0$ 有（拆解为x,y两个方向. $r^2=x^2+y^2$, $v^2=\dot x^2+\dot y^2$）

$$\omega=\sqrt{\frac{Nm}{Nm+2M}\frac{g}{R}}$$

(1) $\begin{cases}x_0=r_0 & \dot x_0=0\\ y_0=0 & \dot y_0=0\end{cases}$

$\Rightarrow x=r_0\cos\omega t$

(2) $\begin{cases}x_0=r_0 & \dot x_0=0\\ y_0=0 & \dot y_0=v_0\end{cases}$

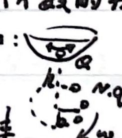
$\Rightarrow x=r_0\cos\omega t$

$y=\dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t$

椭圆.

阶数的分析很重要.

例如：

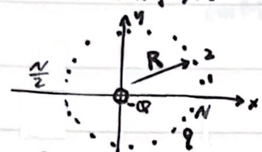


下方N个电荷以ω转起来. 则上方运动还将出现一项$\vec v\times\vec B$. 力（位移）一阶. v一阶. 故B只须取零阶.

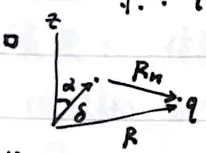
◦ 平面n问题(二)

再举一例，略简单一些。

Ex N向电荷斜振： T3C2



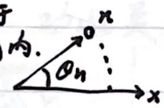
N个q，-Q被限制在与Oz轴夹α角的线上，质量m。求O稳定平衡的条件并求振动周期。



□ 写出δ位移下的电势，二维尤其是三维要善用点乘！

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{1}{|\vec R_n|}\qquad \vec R_n=(R\cos\theta_n-\delta\sin\alpha,\ R\sin\theta_n,\ \delta\cos\alpha)$$

设线位于xOz平面内。



$\theta_n=\Delta+\frac{2\pi}{N}(n-1)$

$$(R^2+\delta^2-2R\delta\sin\alpha\cos\theta_n)^{-\frac{1}{2}}$$ ▷注意振动，φ要留至二阶。

$$=\frac{1}{R}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{R^2}-2\frac{\delta}{R}\sin\alpha\cos\theta_n\right)+\frac{3}{8}\cdot4\frac{\delta^2}{R^2}\sin^2\alpha\cos^2\theta_n\right)$$

求和，利用前面的☆

$$\varphi=\frac{q\delta^2}{4\pi\varepsilon_0R^3}\cdot\frac{3\sin^2\alpha-2}{4}N+Const\ \left(\varphi_0\frac{Nq}{4\pi\varepsilon_0R}\right)$$

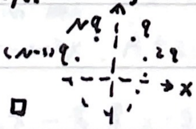
则 $E_\delta=-\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}=\frac{Nq}{8\pi\varepsilon_0R^3}(3\cos^2\alpha-1)\cdot\delta$

故 $0\le\alpha<\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$ 稳定，$T=4\pi\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0mR^3}{NqQ(3\cos^2\alpha-1)}}$

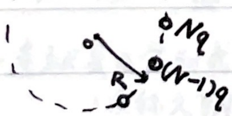
还有一种似乎是平面n问题，但并无几何，更像是时序n一样机械的叠和，关键是找好数学工具，如复数/自相似。

Ex 等差N向电荷场： T2C2

$-o\cdots q\ \ 2q\ \ 0\ q$ 求E_0



□ 令 $E_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R^2}$，$\gamma=e^{i\frac{2\pi}{N}}$



① 标记 E_y+iE_x 使之利用欧拉公式 $-E_0\sum ne^{i\frac{(2n-1)\pi}{N}}$

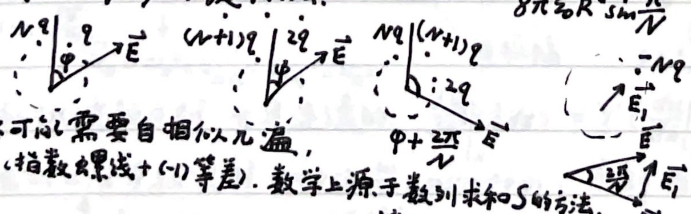
求和（错位相减） $e^{i\frac{\pi}{N}}\sum n\gamma^{n-1}=e^{i\frac{\pi}{N}}\frac{1+\gamma^N(N\gamma-N-1)}{(1-\gamma)^2}=-\frac{N}{2\sin\frac{\pi}{N}}i$

则 $E_0=E_x=\frac{Nq}{8\pi\varepsilon_0R^2\sin\frac{\pi}{N}}$。

▷ 可以发现，精致的选好方便的坐标轴很重要，尽量利用对称性。

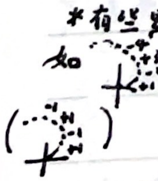
（自相似）

② 还有一个巧妙的旋转法。



$$E=\frac{E_1}{2\sin\frac{\pi}{N}}=\frac{Nq}{8\pi\varepsilon_0R^2\sin\frac{\pi}{N}}$$

*有些题可能需要自相似几遍，

如  （指数螺线+(-1)等差），数学上源于数列求和S的方法。

这些都是平面n问题〈代数、几何，还有就是单纯平面上繁复、需要数列求和的，故称"代数"。

例如 Apho 题  （求和N^2个三角板的势能、动能）

▽ 振动：广泛（一）

> 参变共振：[秋千]  ① 端点突变式（竞赛）

变化点角动量守恒，注入能量等于（一个周期）

$\Delta E = 2\cdot\frac{1}{2}m(v'^2-v^2)+mgb(1-\cos\theta)\cdot 2 = \frac{3mbv^2}{l} = \frac{6b}{l}E$.

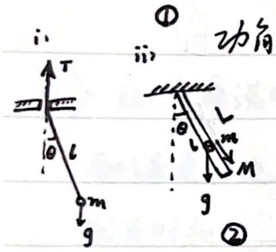
（《朗道》）② 数学缓变式（理力） $\omega^2=\omega_0^2(1+h\cos\gamma t)$，$h\ll1$，$\gamma=2\omega_0+\varepsilon$，$\varepsilon\ll\omega_0$

猜解 $x=a_{(t)}\cos(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2})t+b_{(t)}\sin(\omega_0+\frac{\varepsilon}{2})t$，$\dot a,\dot b\sim\varepsilon a,\varepsilon b$

得需有 e^{st} 解需 $s^2=\frac{1}{4}[(\frac{h\omega_0}{2})^2-\varepsilon^2]>0$ 即有 $-\frac{h\omega_0}{2}<\varepsilon<\frac{h\omega_0}{2}$.

> 缓变：体系参量在缓慢改变，多问振幅变化之比。通常会有外界向体系振动注入（或损耗）能量，有功能关系成立；也满足有浸渐不变量。

外力/耗散力 → 注意，f 不一定做负功，如 ii)（从 $L\to0$ 时。

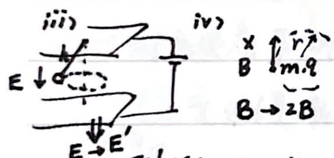


① 功能关系：i) $-\bar{T}dl=dE=\cdots\cdots$　ii) $-\bar{f}dl=dE=\cdots\cdots$

☆ 受力表示 $T(\theta,\dot\theta)$ 并表(f) 示能量E $\bar\theta,\bar{\theta^2}$ → 缓变 取平均 $\bar{T}$ ($\bar f$) → 功能关系 积分 → θ_0 与 l 关系.

（注意！$E=\frac{mg}{2}l\cdot\theta_0^2\cdots\cdots$ 需要分开互 d）

② 浸渐不变量：$\frac{1}{2\pi}\oint pdq=I=\text{Const}$. 在振动椭圆里直接记为椭圆面积 $(a\cdot b)$.（通常即 P-X 图）



如 ii)：$\frac{(I\dot\theta)^2}{I^2}+\frac{\theta^2}{\frac{1}{\omega^2}}=\text{Const}$. 则有 $\theta_0^2\cdot I\omega=\text{Const}$.

→ $\omega=\sqrt{\frac{M}{I}}$（M 为力矩比）表达出来即可.

附例：i) $l_0\to\frac{l_0}{2}$ 时振幅比？ ⇒ $2^{\frac{3}{4}}$　ii) $m=\frac{M}{3}$，l 从 $0\to L$，振幅比：⇒ $\sqrt[4]{\frac{3}{10}}$

▷ 以及，考试时也许不方便使用，除了用 ① 的 dE 方法，还可以形式的导出这个 Const：（最好！）

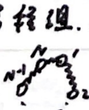
如 iii)：$\begin{cases} m\ddot x=-\frac{Eq}{h}x \\ m\ddot y=-\frac{Eq}{h}y\end{cases}$ 令 $\omega_{(t)}^2=\frac{Eq}{mh}$ 即 $\ddot x=-\omega^2x$. 设 $x=A_{(t)}e^{i\int_0^t\omega(t)dt}$ 缓变 $\ddot A\approx0$. $\ddot A+2i\dot A\omega+iA\dot\omega=0$. 故得 $A^2\omega=\text{Const}$.

> 简正模：通常情况下一类是 2（至3）个自由度的，一类是 n 球相连的情况。

第一类就是正常列式，得到形如 $\begin{cases}-k_1x_1-k_2x_2=\frac{m}{2}(\ddot x_1+\ddot x_2)\\ -\frac{1}{2}l(k_2x_2-k_1x_1)=\frac{I_0}{l}(\ddot x_2-\ddot x_1)\end{cases}$（或称久期法）然后代入试探解 $\begin{cases}x_1=A_1e^{i\omega t}\\ x_2=A_2e^{i\omega t}\end{cases}$

得到 A_1、A_2 双元方程组，再令行列式 =0 算出本征频率.

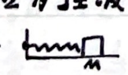
▷ 试探 $e^{i(\omega t+n\varphi)}$ 得谐振频率是力电都常用的手段 (x_n/U_n) < ① $\omega\sim\varphi$ ② $N\varphi=2k\pi$

第二类如球环  可代入试探解 $u_n=a_s\sin(\frac{2ns\pi}{N}+\varphi)\cos\omega_st \Rightarrow \omega_s=2\omega_0\sin\frac{s\pi}{N}$

$(\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}})$ $\ddot u_n=\omega_0^2(u_{n+1}+u_{n-1}-2u_n)$　恒振幅　$s=1,2\cdots N$ 个模

> 注意和纵波相区别，它是连续的. $\left.\frac{d^2u}{dt^2}\right|_x(\lambda dx)=Y(\left.\frac{du}{dx}\right|_{x+dx}-\left.\frac{du}{dx}\right|_x)$ 即 $\frac{d^2u}{dt^2}-\frac{1}{v^2}\frac{d^2u}{dx^2}=0$. $v=\sqrt{\frac{Y}{\lambda}}$.

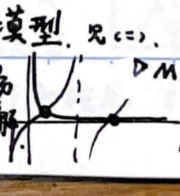
解出的 u 应为驻波形 $u=a\sin\frac{\omega}{v}x\cos(\omega t+\varphi)$. 若解物体振动，即附上了一边界条件：

 ω 还待定.

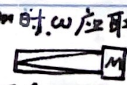
$M\left.\frac{d^2u}{dt^2}\right|_L=-Y\left.\frac{du}{dx}\right|_L$

纵波有一个色散模型，见（二）.　可得 $\frac{\omega L}{v}\tan\frac{\omega L}{v}=\frac{m}{M}$　零级 $\omega=\sqrt{\frac{k}{M}}$，一级 $\omega=\sqrt{\frac{k}{M+\frac{m}{3}}}$.

$m=\lambda L$　$k=Y/L$

最终严格求解成为需要初态傅里叶分解 

▷ $M\gg m$ 时，ω 应取第1个解.

（ω_1 占去了大部分能量. $0\sim\sum A_i\omega_i$ → 由初态之解时极小的 ω_1 相对分去最大）

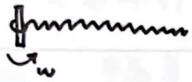
▷ 振动·广波（二）

$\ddot{u}_n=\omega_0^2(u_{n+1}+u_{n-1}-2u_n)$ 球链可代试探解 $u_n=Ae^{i(\omega t+\varphi_n)}$ 得色散关系

$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}l=kl$　　$\omega_{(k)}=2\omega_0\sin\frac{kl}{2}$

区分：相速 $\frac{\omega}{k}$，群速 $\frac{d\omega}{dk}$.

Check:

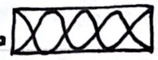


原长L．m．弹簧套在杆上以ω转.

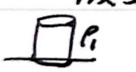
求原x处位移 $y_{(x)}$，给出弹簧稳定的条件 ⇒ $y_{(x)}=\frac{\sin\alpha x}{\alpha\cos\alpha L}-x$

☆边界条件的确定：若连接固物块或其他机制则列相应运动方程.　$y_{(L)}$ 中含 $\tan\alpha L\not\to\infty$

若空，则 $T=0$ 即此处 $\frac{dy}{dx}=0$.　$\omega<\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

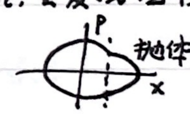
〉纵波再说明：（前面所有的 d 都为 ∂）首先是固体的波动方程，给出简谐波解和波速．边界给出振动模式如  自由端为波腹，固定端为波节，连物体端则为对应边界条件．由此可给出驻波模式．初态给出各模式的成分．一般近似条件下都主要看第一个解.

缓变②浸渐不变量再说明：有时缓变之后会出现"振动断开"的情况，即举个例子：



ρ_1　$\rho_0=2\rho_1$

柱下底面与水齐平释放，后逐渐加盐使 $\rho_0\to1.5\rho_0$．若 $A^2\omega=Const.$ 会发现圆柱会蹦出水面以上．正确做法应是设A，画出全过程正确相图



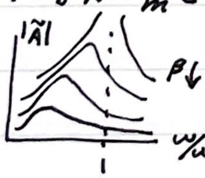
整个S等于原来 S_0 解出A.

〉共振与谐振：▷体系有外界ω频率性输入的，求稳定…振动解可直代 $Ae^{i\omega t}$ 试探.（代入如运动方程）

① $\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{F}{m}e^{i\omega t}$　代入 $\tilde{x}=\tilde{A}e^{i\omega t}$ 得 $|\tilde{A}|=\frac{F}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$　$\varphi_{\tilde{A}}=\tan^{-1}\frac{2\beta\omega}{\omega^2-\omega_0^2}$.

$\tilde{v}=i\omega\tilde{A}$.

振幅共振

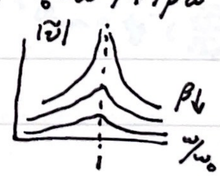


$|\tilde{A}|_m=\frac{F}{m}\cdot\frac{1}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$

$\omega_m^2=\omega_0^2-2\beta^2$

$(\beta>\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ 时无A极值)

速度共振



$|\tilde{v}|_m=\frac{F}{m}\cdot\frac{1}{2\beta}$　$\omega_m=\omega_0$

品质因素 $Q=\frac{\omega_0}{2\beta}$　i) 尖锐程度 $(=\frac{\omega_0}{\text{带宽}\Delta\omega})$　令 $|\tilde{v}|=\frac{1}{\sqrt{2}}|\tilde{v}|_m$ 得 $\omega'=\omega_0\pm\beta$.

ii) 周期耗散 $(=2\pi\frac{E}{\Delta E})$　$E=\frac{1}{2}kA^2\cdot e^{-2\beta t}$（在 $\beta\ll\omega_0$ 时 $\tilde{A}$ 行为也变为如此）

得 $\Delta E=2\beta T\cdot E=\frac{4\pi\beta}{\omega_0}E$

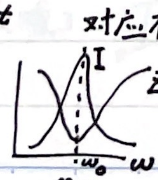
(iii) 见电路谐振)

② $\frac{q}{C}+\dot{q}R+\ddot{q}L=Ue^{i\omega t}$　对应有 $q\sim x$，$i\sim v$，$m\sim L$，$k\sim\frac{1}{C}$，$\gamma\sim R$，$\beta=\frac{R}{2L}\sim\frac{\gamma}{2m}$.

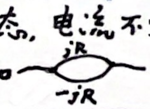
串联

（A在电路意义不大，Z．U更为突出）$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\sim\sqrt{\frac{k}{m}}$.

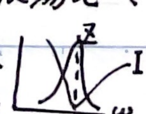
$Q=\frac{\omega_0}{2\beta}=\frac{\omega_0L}{R}$



iii) 振荡比 $(=\frac{U_C}{U}=\frac{U_L}{U})$

▷ $Z=0/\infty$ 即出现谐振状态，电流不受外部控制．如 

*并联



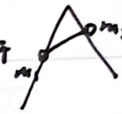
$\approx\omega_0$ $(R\ll1$时)

$Q=\frac{I_C}{I}=\frac{I_L}{I}$　相当于有一大电流在并联回路里，通往外电路 I 很少.

△ 静力平衡

> 几个特殊模型：拉绳：轻绳始终保持拉直。

把圆锥面展开应为一直线。

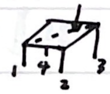


还有一种是在杆上套了轻环或直接绕光滑细线

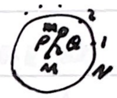
⟶ 随时平衡。一定⊥或角平分。即使微振动也是！

如果环杆间有μ，就是一个夹角$\le\varphi$的事。

桌面：平面等提供额外的形变约束。如



$N_2=N_4$ 同时 $=\frac{N_1+N_3}{2}$。



F_i（平面力问题类似）

$\Downarrow$

$\Sigma F_i=(m+M)g$

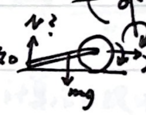
$\Sigma M_i=0$（对O_i连线）

$F_i=F_0+\cos(\theta_i-\alpha)F'$（设$\alpha$为倾斜方向）

可解出F_i。

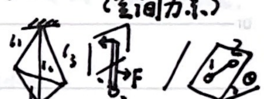
桁架：设力时候方向统一（拉/压为正），分析先整体、后逐点、（部分整体）

> 基础理论：平衡 ⟶ 静止/匀速运动（如 ）—— ▷即将启动的临界

静力 ⟶ 无a、β。α要有a.β.就不在轻易用（如 ）

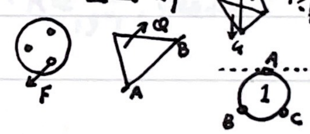
临界分析 ⟶ 力$\vec{F}$之方向？/有无？

单体平衡 $\Sigma\vec{F}=0$，$\Sigma\vec{M}=0$。
- 矢量式 解析表达/矢量图解
- 分量式（一般表达）



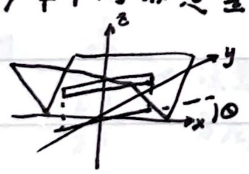
（空间力系）

带μ
- 三全法（空间力系可能也要使用的）
- 设N.f 列解 $\mu\ge\frac{f}{N}$。
- 多点摩擦（临界判断）：谁先滑？/要滑一起滑？



多体平衡亦是整体、隔离等手段，更注重设法与方程的挑选（避开力D）

Ex



$z=\pm y$ 平面 与杆间μ。求平衡时杆在xy平面投影与x轴夹角最小值θ_{min}。

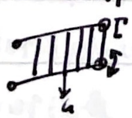
□ 全反力$\vec{N}+\vec{f}$ 水平分量（xy平面投影）必沿杆向。

$\Rightarrow\begin{cases}\theta_{min}=0 & \mu\ge1\\ \theta_{min}=tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{2}\mu}\right) & \mu<1\end{cases}$

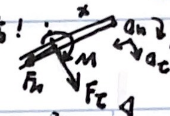
> 能量法：更加广泛。在静力学里可能以质心高度为主。

在判断稳定性应用更多。当然也要力学方法如考察回复力、回复力矩等。

虚功原理：非常重要。有时可以理解为就是能量法。但当是存在f或摩擦力矩Γ时，要想到就比较难了。



▷注意：一般刚体杆上存在 $M.F_n.F_c$ 的分布！



▽ 材料力学

轴向拉伸压缩 $\sigma=E\varepsilon$ $\sigma=\frac{F}{A}$ 故 $\Delta l=\frac{Fl}{EA}$. $U=\frac{F^2l}{2EA}$. $u=\frac{1}{2}E\varepsilon^2$

(剪切)扭转 $\tau=G\gamma$ $l\gamma=\rho\varphi$ T(扭矩) 令 $I=\iint_A\rho^2dA$. $T=\iint_A\rho\tau_\rho dA$ 故 $\varphi=\frac{Tl}{GI}$

$\tau_\rho=\frac{T\rho}{I}$. $U=\frac{T^2l}{2GI}$. $u=\frac{1}{2}G\gamma^2$

(γ与ρ相关,而φ是特征值)

弯曲 $l\varepsilon=z\theta$ $(\varepsilon=\frac{z}{R})$ 令 $I_z=\iint_A z^2dA$. $M=\iint_A \varepsilon E\cdot dA\cdot z=\iint_A\frac{z}{R}dA\,z\cdot E$ 故 $\theta=\frac{Ml}{EI_z}$

(矩形截面即 $\frac{1}{12}bh^3$)

(圆形截面即 $\frac{1}{4}\pi r^4$)

$\sigma=\frac{Mz}{I_z}$. $U=\frac{M^2l}{2EI_z}$. $u=\frac{1}{2}E\varepsilon^2$

> 许用应力：通常是一根杆体,受一些力后,呈现有应力和力矩的分布,要求材料的强度如单位长度(面积)的拉力σ_0等. ▷弯曲力矩产生的正应力近似线性分布

例 船桐浅 $0\sim x$段 $M_{(x)}\to M_{max}$处 计算应力提供的力(偶)矩.

> 横梁挠曲浅：由 $\theta=\frac{Ml}{EI_z}$ 得 $y''=\frac{M_{(x)}}{EI_z}$ $(R\approx\frac{1}{|y''|}, y'$极小$)$

y(挠度) 分析出$M_{(x)}$后代入解即可.

如轻梁,中点挂重物mg后：

$x\sim\frac{L}{2}$段 $M_{(x)}=\frac{mg}{2}(\frac{L}{2}-x)$ $\Rightarrow y''=k(\frac{L}{2}-x)$ $k=\frac{6Mg}{Ebt^3}$

mg(实为$\frac{mg}{2}$,分了一半到右边!) $y=k(\frac{L}{4}x^2-\frac{x^3}{6})+C_1x+C_2$

注意$M_{(x)}$分段,解也需要分左右解▷边值条件 $\begin{cases}y_{1(0)}=y_{2(0)}\\y'_{1(0)}=-y'_{2(0)}\end{cases}$ (0为mg处)

由对称性和原点选择 $(y'_{(0)}=0)$ $y=k(\frac{L}{4}x^2-\frac{x^3}{6})$

$d=y_{(\frac{L}{2})}\Rightarrow E=\frac{MgL^3}{4bdt^3}$

梁自重mg ⇒ $d=\frac{gL^3}{4bdt^3}(M+\frac{5}{8}m)$

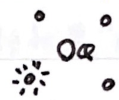
* 由于系统是线性的,挠度的效果可以直接叠加. d_1+d_2.

> 弹性能：一种是振动题,只需要一个几何参量,就可以确定如弯曲程度,得到U,算在势能里即可,包括平衡位置,亦可求一阶导得到.

▷上文的公式都是均匀的情况,但如果是分布,则应改为如 $U=\int\frac{F_{(x)}^2dx}{2EA}$. $U=\int\frac{M_{(x)}^2dx}{2EI_z}$. (有时候难以使用,如横梁) $\varphi=\int d\varphi=\int\frac{T_{(x)}dl}{GI}$ 等.

$(\varepsilon_1=\frac{l}{l_0}-1)$ ▷在既有拉伸又有弯曲时注意 应用还原后只有弯曲的情况计算弯曲的应变,即$\frac{z}{R}\cdot\frac{l}{l_0}$. 由于$\frac{1}{2}E\varepsilon^2$积分时内外会把交叉项消去,故可分开成$U_1+U_2$. 其中$U_2$写为$\frac{M^2l^2}{2EI_zl_0}$. 或者直接做$\frac{1}{2}E(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2$积分.

△ 电像法与电势能（一）

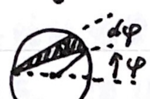
注意，静电力（这里是）是超距力，计算时不要遗漏，如  ← 受力平衡时不要忘了左下角的！

＞先看一道例题，例 圆盘电能： T2C2

$Q=\sigma\cdot 4\pi R^2$

求均匀带电圆盘
(1)边缘点的电势 (2)静电能

□ (1) 积分形式选的好。



$$dU=\frac{\sigma r\,dr\,d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2R\cos\varphi}dU=\frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}$$

＊均匀带电球内：
$$\varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{3}{2}-\frac{r^2}{2R^2}\right)$$
↑记

(2) 逐个环带移出（面微元自能可略）

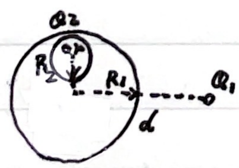
$$W=\int_0^R \sigma\cdot 2\pi r\,dr\cdot U_{(r)}=\frac{2\sigma^2R^3}{3\varepsilon_0}=\frac{2Q^2}{3\pi^2\varepsilon_0 R}$$

首先电势要会算，要么点电荷、线电荷，要么$\frac{1}{r}$展开，要么如这种一定的积分技巧。其次，☆移入/移出求静电能思想很常见，差值就是做功，例如最顶上四角的例子，其$W=0$，因为始终受力平衡。（$A=\Delta W$ 永远成立）

▷ 重申一遍静电能定义： 一个体系 $W=\Sigma\frac{1}{2}qU$，U为除q外产生在q处电势。
场源固定，不关心场源时 $W=\Sigma qU$ 还未包括场点q们自能。
极化时 $W=\Sigma\frac{1}{2}q_0U$ q_0为自由电荷，而U是所有电荷在q处电势。

＞ 带有像电荷的体系，算静电能按真实所在分布看，$W=\Sigma\frac{1}{2}q\varphi$，有时接地$\varphi=0$；有时是导体，$\Sigma q=0$原不带电；或者顶多算个导体处电势，都很方便。再不济也可以用F积分，也是办法。不过注意有时会问"相互作用能…"，记得从$\frac{1}{2}q\varphi$中扣去自能项。

例 经典经典： T1C1

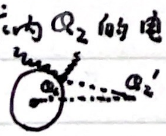


球R_1，$d>R_1$处有Q_1
内有空腔R_2，$r<R_2$处有Q_2
求体系电势能(1) (2) Q_1移走所做的功。

$$\Rightarrow {}^{(1)}W=\frac{KQ_1Q_2}{d}+\frac{k}{2}Q_2^2\left(\frac{1}{R_1}-\frac{R_2}{R_2^2-r^2}\right)-\frac{k}{2}\frac{Q_1^2R_1^3}{d^2(d^2-R_1^2)}$$

$$^{(2)}A=-\frac{KQ_1Q_2}{d}+\frac{k}{2}\frac{Q_1^2R_1^3}{d^2(d^2-R_1^2)}$$

▷ 球内Q_2的电势 $\varphi_2=U_{球}+\frac{kQ_2'}{\oslash}$：算$U_球$其实已经计入了$Q_2$的影响（不然怎么等势为0）而∞至壳$Q_2$的积分正等于负的∞至壳$Q_2'$积分，减去其后，便是∞至$Q_2$点处的$Q_2'$积分。



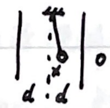
例 T1C1

q在接地导体半球壳内
由O上方a处水平移动b，求外力做功

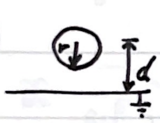
$$\Rightarrow W=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2Ra^2}{R^4-a^2}-\frac{R}{R^2-(a^2+b^2)}+\frac{R}{\sqrt{(a^2+b^2)^2+R^4-2R^2(b^2-a^2)}}\right)$$

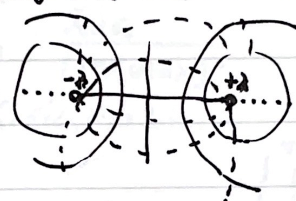
△ 电像法与电势能 (2)

前面这个圆的多镜面电像是"自称型"的，还有一种就是"无穷电像型"，举几个例子：

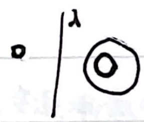
 电容 $C=8\pi\varepsilon_0 R\underbrace{(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots)}_{\ln 2}$ 。  $F_x=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^3}(1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\cdots)x$

> 电像反演：当我们求解导体的电势差、电容、面电荷分布等时，对于导体这个等势面，可以进行猜解场(电像)的形态。同样，对于产生一定的场、具有一定分布电荷的带电体，我们可以认为其是某情况下场源的电像，再利用虚观"虚假的"场得到其电极化的形态。

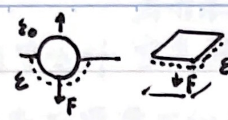
Ex  λ.d.柱
求与大地间电容 C

□ 常用： $\propto\frac{1}{r}$场 ⇒ 圆
其等势面位置可以遵照球面电像法。

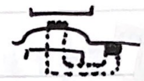
Ex 钳钳圈：$r^2-2ar+a^2=0$.
等效产生了一 $p_0\hat{i}$ 的偶极子场。
求电荷面密度 $\sigma_{(\theta,\varphi)}$

□  绕转一圈。
导体球在匀强场下极化出 $p_0\hat{i}$
故只需考虑产生匀强场的 λ 分布，
和其对应的电像(即钳钳圈)

△ 电介质相关 (一)

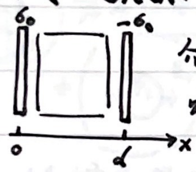
> 极板(导体)受力:  一句话记住: 外侧场能密度 = 单位面积受力 $\frac{\sigma^2}{2\varepsilon} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = f_0$

一句话理解: 外部极化电荷受力会压迫到极板上.

电介质受力: 一切求力虚功很稳  $F = \left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_U = -\left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_Q$; 

* 极化小球受力即电偶极子在外场中受力. ($r \gg a$ 时)

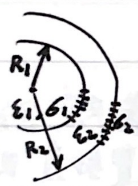
> 极化公式 Check:

Ex 

介质 $\chi_e(x) = \chi_0(1+\alpha x)$, 厚 d.

则极化体密度 $\rho'(x) \Rightarrow = -\frac{\chi_0\alpha\sigma_0}{[1+\chi_0(1+\alpha x)]^2}$

▷ 0, d 处存在间断, 有 $\sigma'_{(0)}$, $\sigma'_{(d)}$, 不应忘记.

Ex 

初始 $r \le R_1$ 内有均匀 ρ_0.

求 t 时刻 $\sigma_{1(t)}$, $\sigma_{2(t)}$.

$$\begin{cases} \nabla\cdot D = \rho \\ D = \varepsilon E \\ j = \sigma E \\ \nabla\cdot j + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

* 结论: 存在电荷的导电区域, 会逐渐散开. $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\rho = 0 \Rightarrow \rho_{(t)}$ 定.

$\rho_{(t)} \to Q, \sigma_{(t)} \to E_{(r)}, D_{(r)} \to j_{(r,t)}$ (内侧, 外侧) $\Leftrightarrow \frac{d\sigma_{(t)}}{dt}$ 解出 $\sigma_{(t)}$

> 公式使用的提醒:

i) $P = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\underset{\triangle}{E}$, E是 $E_{内} = E_0 - E_{退}$! 不要直接犀性代入. 一定是要够该解方程的.

或者 $P = (1-\frac{1}{\varepsilon_r})\varepsilon_0 E_0$ (E_0 即主动场), 先除个 ε_r.

ii) 永久极化的电介质之类 $\vec{P}$ 都是人为做的. $\vec{P} = \chi_e\varepsilon_0\vec{E}$ 是外场下规律, 不适用. 但仍有 $\rho' = -\nabla\cdot\vec{P}$. $\vec{E}$ 由 ρ' 高斯定理求解. 不必引入 ε.

iii) 常用柱坐标, 球坐标时, 一定注意 $\nabla\cdot$, $\nabla\times$ 形式改变. $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)$, $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)$ 而不是 $\frac{\partial A_r}{\partial r}$!

iv) 球偶结论 (一): $\bigcirc \to E_0$ $\frac{P}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho d}{3\varepsilon_0} = E_{退}$, $p = \frac{4}{3}\pi r^3\rho d$, $\sigma_{(\theta)} = \rho d\cos\theta$

☆ 记住结论 (小介质球时用):

ε_{r1}, ε_{r2} (1中) $\to E_0$ $P = 3\varepsilon_0 E_0 \frac{\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}+2\varepsilon_{r1}}$ (= $P_2 - P_1$, 是总的)

① $P = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)(E_0 - \frac{P}{3\varepsilon_0})$ 即利用 $P \propto E_0 - E_{退(q)}$ 列式.

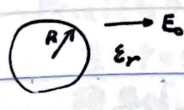
② 利用 D 连续列式. 不过必须考虑到靠近球处电场不是 E_0.

$(E_0 - \frac{P}{3\varepsilon_0})\varepsilon_r = E_0 + \frac{2P}{3\varepsilon_0}$ ($\frac{2p\cdot\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = \frac{2P}{3\varepsilon_0}$)

若导体球时, $\varepsilon_r \to \infty$, $E_0 = \frac{P}{3\varepsilon_0}$. 注意! 只有导体没有, 电介质 θ 方向上表面也有切向电场的.

▷ 理解上核心点: 极化电荷会反过来影响极化; 猜解球偶思考上有先后, 其实只是做唯一性的求解.

Ex 介质中的空腔: T3C1



(1) 腔内电场

(2) 放入一半径相同的导体球, 其带有电量 Q, 求球受力.

□ (1) 用上述两法列一遍: $E_{内} = E_0 + \frac{P}{3\varepsilon_0}$

$$\begin{cases} ① \ P = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)(E_0 - \frac{2P}{3\varepsilon_0}) \\ ② \ \frac{P}{3\varepsilon_0} + E_0 = \varepsilon_r(E_0 - \frac{2P}{3\varepsilon_0}) \end{cases} \Rightarrow \text{都可得 } E_{内} = \frac{3\varepsilon_r}{2\varepsilon_r + 1}E_0$$

△ 电介质相关 (c)

* 介质小球受力用 $\vec{F}=\vec{p}\cdot\nabla\vec{E}$ $\left(=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\cdot\frac{1}{2}\nabla E^2\right)$

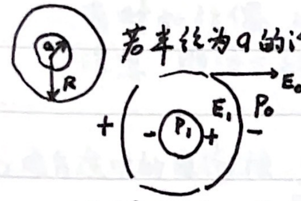
(2) 如果是题目里这种 与介质间空气薄层 等价于 直接置于电介质中. 从思考上有如下的理解.

由导体. 于是总电荷面密度可视为 $3\varepsilon_0E_0\cos\theta$. 其次."平衡置荷"的思想很重要. Q在刚

受力即 $df=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r\cdot\left(3E_0\cos\theta+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_rR^2}\right)^2$ 刚基础上只是均匀的拉了一些极化电荷.

在 f_x 方向积分 $\Rightarrow F=\frac{3}{2}E_0Q\cdot\int_0^\pi\cos^2\theta\sin\theta d\theta=E_0Q$ ◁关注这个事实!

若半径为a的话: 球偶仍是对的.



(E₁概念略不同)

$P_1=3\varepsilon_0E_1\quad E_1=E_0+\frac{P_0}{3\varepsilon_0}$

$$E_0+\frac{P_0}{3\varepsilon_0}+\frac{2P_1a^3}{3\varepsilon_0R^3}=\varepsilon_r\left(E_0-\frac{2P_0}{3\varepsilon_0}+\frac{2P_1a^3}{3\varepsilon_0R^3}\right)$$

可以解出.

当令 $a=R$ 时 $P_0=3\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)E_0\quad P_1=3\varepsilon_0\varepsilon_rE_0$

所谓σ即 $P_1-P_0=3\varepsilon_0E_0$.

(正负定义, 注意 $D_{\vec{P_1}}$) $\vec{P_2}$ 要相减)

但空气薄层在受力上并不与直接置于相同. 正是前文里"用一句话理解"说的.

空气薄层顶住了这个附加力.

(举一个不恰当的例子. 它只能说明空气层的重要性:

水底的物块 

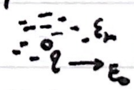
浮力?大气压?)

> 极板受力再补充:

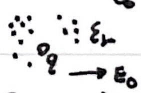
前面说的"用一句话理解"里的压迫说法.

针对的是液体电介质.

而固体电介质自己"顶住了"这个压迫. 没有这个理解, 计算上也当视为"小小的空腔".



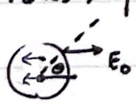
$F=qE_0$



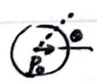
$F=q\varepsilon_rE_0$ (利用图(1))

v) 球偶结论(2): 不仅仅是均匀外场 E_0. 一个偶极子场也可实现球偶.

由静电场唯一性定理. 我只要对任意θ, $D_1=D_2$, 就可成立. 在球偶假设下. 只需要外场沿径向分布是 $\cos\theta$ 形式, $\cos\theta$ 就可以等式两边消掉. 定解 σ_0.



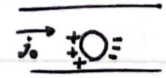
$$\varepsilon_r\left(E_0\cos\theta-\frac{P}{3\varepsilon_0}\cos\theta\right)=E_0\cos\theta+\frac{2P}{3\varepsilon_0}\cos\theta$$



只是将 E_0 换作了 $\frac{2P_0}{4\pi\varepsilon_0r^3}$. 于是其 $\sigma_0=\frac{3(\varepsilon_r-1)}{\varepsilon_r(\varepsilon_r+2)}\frac{P_0}{2\pi r^3}$.

其中 ε_r 源自介质球极化"另一端"对电偶极子 P_0 的遮蔽 (即取 $\frac{P}{\varepsilon_r}$ 作计算)

▷ 还有一种是, 在电流场下形成的球偶:



(对外 $\frac{P}{\varepsilon_r}+\frac{4}{3}\pi r^3\sigma_0=P_{总}$)

☆ 这里球面上存在自由电荷!

所以没有D连续的条件. 而有平衡条件 $E_0-\frac{2P}{3\varepsilon_0}=0$ (外部无场, 不能再流)

至于 $P=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)E$ 的式子. 它只是考察静电(极化)提供的电荷. 而这个 $P=\frac{3}{2}\varepsilon_0E_0$ 是总的. 将导体(j₀)与空腔任意 ε_{r1}. ε_{r2}, 总的效果不会变.

△ 电介质相关(三)

vi) 球偶结论(三)：与此同时，还有柱偶.  $P=\rho\cdot\Delta r$

▷ 入异号线在远处：($p=P\cdot\pi R^2$) ▷ $\overleftarrow{E}_{内(退)}=\frac{P}{2\varepsilon_0}$

(即$\frac{1}{r}$求导) $\frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}+\frac{p\sin\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\theta}$ $\overrightarrow{E}_{外}=\frac{P}{2\varepsilon_0}$

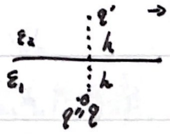
其系结论不好现推. 如 $P=\frac{2\varepsilon_0(\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r1})}{\varepsilon_{r2}+\varepsilon_{r1}}E_0$

附：题目求等效介电常数ε. 用总的极化强度计算.

有时如柱偶，沿柱向和横截向不同. $n=\sqrt{\varepsilon}$. 成为一双折射晶体.

注意，胶体式的等效极化强度应为 $P_1'+\eta(P_2-P_1)$ （P_1为远处即$(\varepsilon_1-\varepsilon_0)E_0$）

△不用乘$(1-\eta)$. 相应 $\varepsilon=\varepsilon_1+\eta\cdot(\cdots)$

vii) 电介质中的电像法 

→ $\boxed{②\ 1}$

$q'=q''=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}q$

q贡献用ε_1除，q'/q''用ε_0除. （q'对下半，q''对上半）

viii) 磁标势法：如果遇到磁学的球偶.柱偶等极化相关内容，统一用对应表先解电学再替换！

电	E	D	φ	ρ	σ	ε	ε_0	P	p
磁	H	B	φ_m	ρ_m	σ_m	μ	μ_0	$\mu_0 M$	$\mu_0 m$

▽ 传导/电学类比

★ 补一个电流场注意的点：当空间中σ不是均匀的时候，存在自由电荷分布，不要用静电场的结论如$E \propto \frac{1}{r^2}$，从电流连续性方程即I，j入手。

> 电流场～静电场：$\oiint \vec{j} \cdot d\vec{s} = I$　$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$　$\vec{j} = \sigma \vec{E}$

（$\vec{E}_i$与$\vec{E}$以示区分）

$j \sim D$　　$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$　$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = 0$　$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}_i$

$I \sim Q$

$\sigma \sim \varepsilon$

（不推荐使用，除非题目是明确的 $\downarrow I$ 电极插入，就算明确也大可不必）

一般的漏电场，就正常的去看看 $I = -\frac{dQ}{dt} = \sigma \phi = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} Q$

$\downarrow I$ 半无限高斯定理也应改为 $j = \frac{\rho I}{2\pi r^2}$.

> 传热场：$J = -k\frac{dT}{dx}$　$j = -\sigma\frac{d\varphi}{dx}$　　$k \sim \sigma$

$\oiint \vec{J} \cdot d\vec{s} = P$　$\oiint \vec{j} \cdot d\vec{s} = I$　　$T \sim \varphi$

★ $mc \sim C$　（c为比热容，mc即热容）

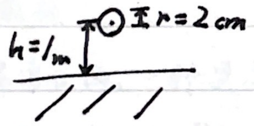
$J \sim j$（$P \sim I$）

通过几何形态关联了主要电学量ε_0的表达式　$Q \sim q$

（即，关键的区别在于，电学里我往外的电通是只跟Q有关的（高定），而导热时外界如何影响了我的热通）
这里的C应定义为$\frac{q}{\varphi}$，包括自身与他人（的影响），可能是过程的函数.

Ex 气温0℃，水面结冰.

将冰视为良热导体，空气热导率$k = 0.028\ W/m \cdot k$. 一铁球初温$T_0 = 100℃$. 求降至$T_1 = 50℃$用时. 其密度$\rho = 7.86 \times 10^3\ kg/m^3$. 比热容$c = 0.46\ J/g \cdot ℃$



T2C1

$\Rightarrow -\frac{dT}{dt} = \frac{3kl}{\rho c r^2 (l-r)} T$　（$l = 2h$）$\Rightarrow t = 1.18 \times 10^4\ s$

△

(如E沿向电接(发电机),如j_x,j_θ同轴筒)

外界$\vec{j}$都可流时,$\vec{E}$无法调整,一定是定$\vec{E}$不定$\vec{j}$

☆单载流子就是$\vec{j}=\sigma\vec{E}+\frac{\sigma}{ne}\vec{j}\times\vec{B}$定态.注意外界要求,外界不允许的,有$E_i$调整.

△导体/半导体

☆(实为$\sum$) 是1.2合的结果.各自$\vec{j}\propto\vec{v}$,存在y(z)向.

> 磁阻效应: 核心就是,$\vec{j}=\sigma(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})=j\hat{x}$ 是最终结果态.若有j_y.j_z将会由积累的E调整回来.到终态.(导体接在x回路上)

用σ.μ(迁移率)表征载流子.1.2.

▷求解电流场.不是要考察单个粒子的运动.而是统计意义下宏观规律的展现.

$$j=\sigma_1(E_x+v_{1y}B)+\sigma_2(E_x+v_{2y}B)=\sigma E_x$$

$$\begin{cases}\frac{\vec{v}_1}{\mu_1}=\vec{E}+\vec{v}_1\times\vec{B}\\ \frac{\vec{v}_2}{\mu_2}=\vec{E}+\vec{v}_2\times\vec{B}\end{cases}$$

$j_y=0$ 即 $\sigma_1(E_y-v_{1x}B)+\sigma_2(E_y-v_{2x}B)=0$

将解出的$v_{1y}(E_x)$.$v_{2y}(E_x)$代入.

$$\sigma\approx\sigma_1+\sigma_2-\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}(\mu_2-\mu_1)^2B^2$$

> 伦敦方程: 描述超导电子(与正常电子直接叠加)

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{j}_s=-\frac{n_se^2}{m_s}\vec{B}\\ \frac{\partial\vec{j}_s}{\partial t}=\frac{n_se^2}{m_s}\vec{E}\end{cases}$$

$(\vec{j}_s=-\frac{n_se^2}{m_s}\vec{A})$

i) 零电阻 $\frac{\partial\vec{j}_s}{\partial t}=0$ 定常流动 $\Rightarrow\vec{E}=0$. $R=0$

ii) 迈斯纳效应(抗磁)

Maxwell $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}_s$ 代入 $\nabla^2\vec{B}=\frac{\mu_0n_se^2}{m_s}\vec{B}$

$\Rightarrow B=B_0e^{-\frac{x}{\lambda}}$

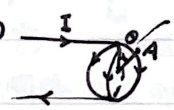
$\leftarrow B_0$ 穿透深度 $\lambda=\sqrt{\frac{\mu_0n_se^2}{m_s}}$.

△磁场相关

> 已知I分布求B的,一种是毕萨,如果毕萨很明显不可实施,一定要去寻找环路.环路无非是利用对称性.常见的便是平移和旋转的对称.各举一例说明: ① $+\lambda$ I $-\lambda$

求B可以

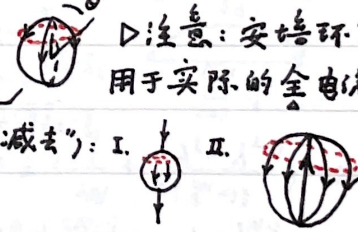
② I 导体球壳 A 求A处内外的B.



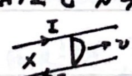
③ $B=B_1+B_球$ B_1为上下半无限长产生的.

▷注意: 安培环路定理适用于实际的全电流产生的$\vec{B}$,而非电流元!

提供两种构造方式("再减去"): I. II.



> 注意有时感应电动势是动生和感生皆有的.如 I x I v (动体后方磁场会改变)



请使用法拉第感应定律 ε.如上面例子里实际上增加了无穷远处一平行双导线间磁通.

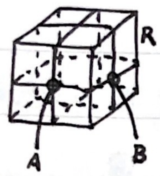
> 求表面磁力:

$$\begin{cases}\vec{F}=\vec{j}\times\vec{B}\,ds & \vec{B}=\frac{\vec{B}_内+\vec{B}_外}{2}\\ 虚功\ \vec{F}\cdot d\vec{r}=\left(\frac{B_内^2}{2\mu_0}-\frac{B_外^2}{2\mu_0}\right)ds\,dr\end{cases}$$

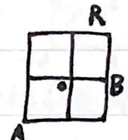
(类似于"电大侠相关△"里的"一句话")

△ 电阻网络：经典

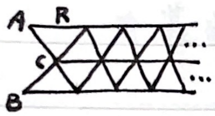
常用手段 { a. 对称性（等势、对折、拆分、中性面…） b. 叠加原理 { 电流（电流分布法 /U） 电源（及戴维宁）
c. 基尔霍夫 { 有限 d. 自相似（迭代、成比例）
e. Y−Δ变换 无限（数列）

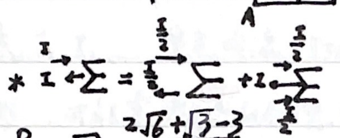
Ex


$R_{AB} \Sigma\!\!> \frac{24}{35}R$

Ex


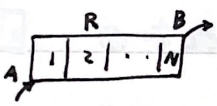
$R_{AB} \Sigma\!\!> \frac{29}{24}R$

Ex


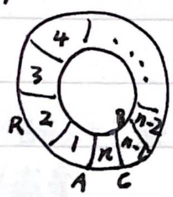


$R_{AC} \Sigma\!\!> \frac{2\sqrt{6}+\sqrt{3}-3}{6}R$

Ex

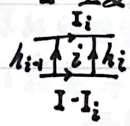
Ex


I.

II.


求$R_{AB}=?$

□ 主要展示一下数列边界条件的定法. T2<3

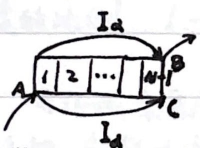


$$\left.\begin{aligned} &I_i+h_i=I_{i+1} \\ &I_i+h_{i-1}=I-I_i+h_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_i=\frac{I}{2}+A(2+\sqrt{3})^i+B(2-\sqrt{3})^i$$

$(4I_i-I_{i-1}-I_{i+1}=I)$

I. 由始末二格 ⌐> ↓> $I_0=0$. $I_{N+1}=I$.

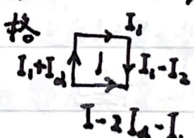
或有对称性 k格 ~ $N+1-k$格 $I-I_k=I_{N+1-k}$.



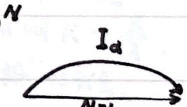
(R/ 1/C) （对称性）

II. $I_i=\frac{I-2I_\alpha}{2}+A(2+\sqrt{3})^i+B(2-\sqrt{3})^i$

对称性得 $B=-A(2+\sqrt{3})^N$

始末二格


.



$\sum_{i=1}^{N-1} I_i$.

$\overset{\text{II.}}{\Sigma\!\!>}$ $I_i=I\left(\frac{1}{2N}+\frac{\lambda^i-\lambda^{N-i}}{2(\lambda^N-1)}\right)$ $\lambda=2+\sqrt{3}$.

$R_{AB}=\left(\frac{2N-1}{N}+\frac{\lambda-\lambda^{N-1}}{2(\lambda^N-1)}\right)R$

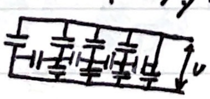
▷ 提一下c.这类有限杂网络处理时，

注意设法的挑选. 若不关心内部，可以Y−Δ;

若网络较简，可以设支路电流或回路电流I_i

（及感生网络） 而且在处理 $I_1 \curlyvee I_2$ I_1-I_2 的"T"形表达上

方便；但若网络"+"形多而未知结点少（即

"齐头并进"形


），可以设结点电势U_i.

解电流Σ=0/电量Σ=0.

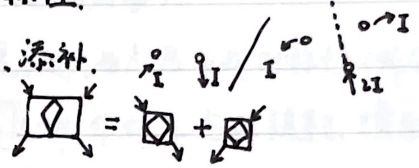
△ 电阻网络：板

"板"是一种思想：一份电流在网络各端口产生一定的电势差，总的即线性叠加。

☆ 叠加原理： 目标：套基本形，造对称性。 ★"Y"之1式、"Y"之2式非常常用！

从I着手，算的是U。 正用→电流分组、添补。 切割

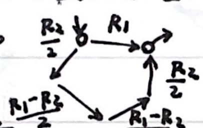
逆用→代表：



> 板组：① 标点、分层，分析序对称和面对称。

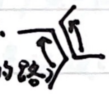
② 设电流 $I_1, I_2 \dots$ 节点电流 $\Sigma I=0$ + 对称性，把未知I降到最少（0 or 1个?）

③ 基本形 可能需要叠加原理、切割等互相推一推。

得到如  图。

④ 走路。

对要考察段的电势差，建议在脑中叠加ΔU的方式算。

有时可能需要等压关系  解出 I_x 和最终的U、R。

（两条不同的路）

> 自相似： ★ 线度的比例 $l \to \lambda l$， $r \to \lambda r$， $\varepsilon \to \lambda^2 \varepsilon$，

分形/嵌套 $I \to \lambda I$， $P \to \lambda^3 P$。

电路板看厚度是否随λ变。 $\rho \frac{L}{hd}$ 若d不变则R不变

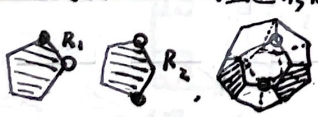
首先一定是对称性，判断电流情况，先设对。 $d \to \lambda d$ 则 $R \to \frac{R}{\lambda}$。

中性面、切割。  之后就是正常"板"的办法。

→ 无电流从面上出入！

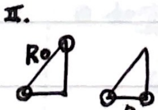
▷ 如果是三个端口，推荐三端等效：很可能题目更深一步，求I_n，求P等；需要寻找递推关系（一般都是三端题 ）

Check: I.（五边形的十二面体）



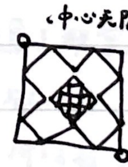
R_1 R_2，$R_{对顶}$=?

II.



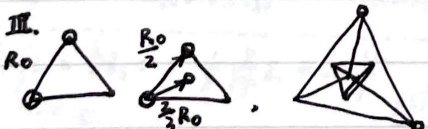
R_0 R_1，R_1=?R_0

（中心无限嵌套）



R=?

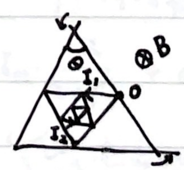
III.



R_0 $\frac{R_0}{2}$ $\frac{2}{3}R_0$，R=?

（中心无限嵌套正四面体）

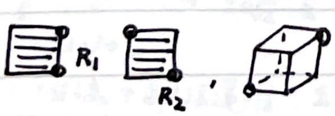
IV.



θ=60°时 I_n=? P=?

θ=90°时 I_n=? P=?

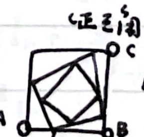
I'.（I.简版）



R_1 R_2，$R_{对顶}$=?

（正三角形无限嵌套）

V.



R_{AB}=? R_{AC}=?

（1:4即[illegible]无限嵌套）

△ 电阻网络：磁场

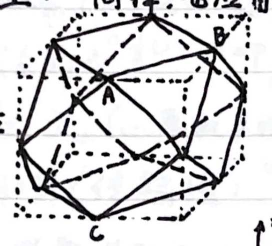
（如果B还匀变，则 $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$， 其中 $\varepsilon_1=Blv$，$\varepsilon_2=kS$，建议写 $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$+基霍。一旦不止单边进入，最好列基霍）

> 进出磁场：核心就是总等效：$\varepsilon=Blv$，$F=BIl$，$R_{总}$（$\varepsilon_总$）

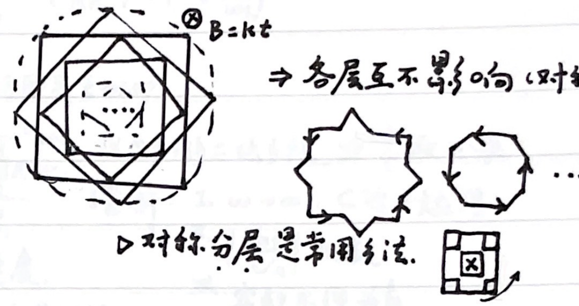
剩下的就是求电阻和求和、积分的事了。

考试不会算很困难的基尔霍夫，即使是多边，也应先分析对称性（拆分）再做计算。

> 匀变感生：同样，也应首先寻找对称性作拆分，包括旋转，镜面等。



如（十四面体网络）$\vec{B}=\alpha t(-\vec{i}+\vec{j})$ ⇒ $U_{AC}=0$，$U_{AB}=0$

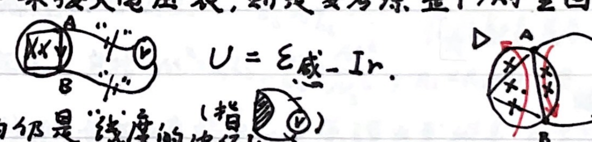


⊗ $B=kt$ ⇒ 各层互不影响（对称，I相同）

▷ 对称分层是常用方法。

（拆分后）不对称的网络（或部分在磁场中旋动，产生一个具体的电源）往往进行具体的计算，利用回路解出电流（基霍）以及一些"连径向"之类的技巧。

▷ 注意，问 $U_{AB}=\varepsilon_{AB}-I_{AB}\cdot r_{AB}$，如果接入电压表，则是要考察整个测量回路：

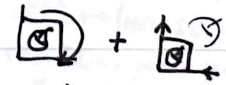


$U=\varepsilon_感-Ir$.

▷ 注意两侧影响的电流方向是相反的！每次最好比划一下）

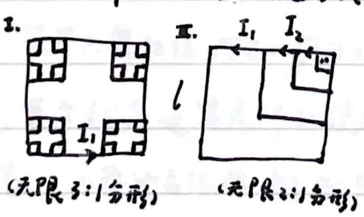
还有一大类是自相似。最重要的仍是"线度的比例"（指 ε 见前页）

分形常用方法：算 ε，I 可以分成 ☆ 别人回流进来搞的（大的）+ 小的自己产的（比例）



算 P 也可以 ⟵ 交叉项有正有负抵消（但网络必须是对称的，如下方的 I）

Check:



⊗ $B=kt$

I.（无限 3:1 分形） II.（无限 2:1 分形）

① 如算 I：I. 计算 I 非常麻烦，因为种类很多，左右的 I_{n+2} 不同……越来越多，所以较不推荐这种非单向的。

II. $I_{n+1}=I_n\cdot\frac{2}{2+\sqrt{2}}+a_{n+1}$ ⟶ 自己产的

（电流为比） $a_1=I_1$，$a_{n+1}=\frac{I_1}{2^n}$

⇒ $(2-\sqrt{2})\left(I_n+\frac{I_1}{2^n(\frac{3}{2}-\sqrt{2})}\right)=I_{n+1}+\frac{I_1}{2^{n+1}(\frac{3}{2}-\sqrt{2})}$

② 如算 ε：I. $\begin{cases}U=\frac{1}{3}I_1+2\cdot\frac{1}{3}\frac{\Sigma}{14}I_1+2\cdot\frac{U}{9}\\ U=\frac{1}{4}\end{cases}$

（$\frac{\Sigma}{14}$ 为三端等效值，$\frac{\Sigma}{14}$ 最大的块）

II. $\begin{cases}U=\frac{1}{2}I_1+I_1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{U}{4}\\ \frac{1}{2}=U+I_1\end{cases}$

☆ I法：（分流+自产）I递推，Σ一边=…… 总回路 $2\cdot\sum_{i=1}^{\infty}I_i\cdot\frac{1}{2^i}+2I_1=1$ 解出 I_1，I_n。

ε法（较推荐）：设出电势降，往下推一个 I_1。

附：▷ 还有一种非匀强 B 产生的感生电场 E，求法：$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l}=\iint-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$ 把 $-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ 视为 $\vec{j}$，$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\iint\vec{j}\cdot d\vec{s}$ 用虚拟的电流场视角考察 $\vec{B}$（即 $\vec{E}$）。

（常由 I 产生，存在 $\dot{I}$）

但第一反应应该还是 $\varepsilon=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$。

* 注意也有叠加原理！ $\vec{B_1}+\vec{B_2}$ ⇕ $\vec{E_1}+\vec{E_2}$

△ 交流电路

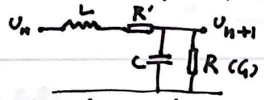
> 计算复阻抗：① 分子分母都是带 j 的加减，可以 I. 分母实化 II. z^*z 即将 j 改 $-j$ 相乘. III. $e^{j\varphi}$ 视角，特别是 $\frac{a+jb}{a-jb}$ 型的. （$e^{j\varphi}$ 欧拉拉开）

② 单纯的并联可以直接写倒数式 $\frac{1}{z}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R_L}+\frac{1}{j\omega L}-j\omega C$. 利用 $|z|=\left|\frac{1}{z}\right|$ 倒数.

还有一个是算功率. $P=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(U^*I)=\frac{1}{2}U^2\mathrm{Re}(\frac{1}{z})=\frac{1}{2}UI\cos\Delta\varphi$. （此处指峰值） $|z|=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R+R_L}{RR_L}\right)^2+\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)^2}}$

▷ 在直交流成分都有时，建议写出 $\tilde{U}_{(t)}$、$\tilde{I}_{(t)}$ 再取平均. 两个三角平均即是 $\frac{1}{2}\cos\Delta\varphi$.

> 无限网络/传输线：



设出 z 解二次方程. ☆ 常取正根！

基本上照题推即可. U_{n+1} 对 U_n 有一个 $e^{j\varphi}$，于是就有传波速度.

理解：I. $\omega\to\infty$. C 近乎短路 II. $\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|$ 收敛 III. 实部不许为负.

还有一种是试探解. 不要多想，解出来的一定是对的. 关心 $\sqrt{\ }$ 正负，存在振荡（阻尼）解.

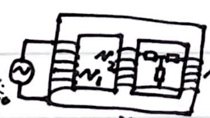
> 互感/变压器：最本质的一点是列回路方程. 如
$$\begin{cases}\varepsilon_1=L_1\dot{I}_1+M\dot{I}_2 & \text{输入}\\ \varepsilon_2=L_2\dot{I}_2+M\dot{I}_1 & \text{输出}\end{cases}$$
$\varepsilon_2\sim I_2$ 输出部分关系 → 若 2 开路 $I_2=0$. $\varepsilon_2=\varepsilon_1\frac{M}{L_1}$.

变压器其实也是这个. 已经就可以解出相应的 I_1、I_2 了.

但有时我们会提出"理想变压器"的概念，包括 $M^2=L_1L_2$, $\frac{L_1}{L_2}=\frac{N_1^2}{N_2^2}$；$R_1=R_2=0$；$Z_{\text{输出}}\ll Z_1, Z_2, Z_M$.

这样解得的答案可以化为常见的比值结论，也可以直接从一些原理出发推导，见下面.

▷ 复杂一些的，磁路



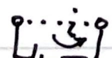
理想变压器（ϕ 即 H 几乎为 0 ⇐ 自互感远大于 Z、$\tilde{U}$）

☆
- 节点 ↔ 磁通 $\frac{\tilde{U}_1}{N_1}=\frac{\tilde{U}_2}{N_2}+\frac{\tilde{U}_3}{N_3}$
- 回路 ↔ $\oint H\,dl=\Sigma I=0$ $N_1\tilde{I}_1=N_2\tilde{I}_2=N_3\tilde{I}_3$ （磁阻 →0, $\mu\to\infty$, $H\to0$）
- 正常电路关系、[N_1 处回路] [N_2、N_3 处回路]$_2$

> 电磁波：$\vec{E}$、$\vec{H}$ 只需记住 $\sqrt{\varepsilon}E=\sqrt{\mu}H$（同相），方向由 $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}\propto\vec{k}$ 判断. （$S=\frac{1}{2}E_mH_m$）

设好解析式，其余就是边界条件的使用.

> 暂态电路：不要过分依赖解析，还应该自己红观判断过程. 尤其是二极管混在里面时. 电流一般可以瞬变！



电压判断就不要走这种路，尽量走纯导线或 $\dashv\vdash$.

电感支路上电流不瞬变. 电容上电量（电压）不瞬变. 用这些判断初态.

还有一种是交替暂态，需要设出 $I^1_{(0)}$、$I^2_{(0)}$，解好 1.2 过程后再通过一些关联，如上面的 i_R 有 $I^1_{R(0)}=I^2_{R(T)}$、$I^2_{R(0)}=I^1_{R(T)}$ 解出来.

▽ 磁荷

适用条件：单连通域，无传导电流. 电荷分布 ⟺ 磁荷分布 $\overset{☆}{\underset{Ⓑ}{⟺}}$ 电流分布

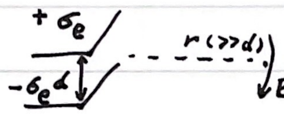
单纯磁化问题见"电介质相关(三)A"　电极化　磁化　无电流环

（$\vec{J}=\mu_0\vec{M}$ 磁极化）

$\boxed{Ex}$ 叶电三例：

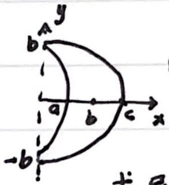
求吸引力 $F=\mu_0 M^2 S$

"… ⟵ …"



求 $E=\dfrac{\sigma_e d}{2\pi\varepsilon_0 r}$

"… ⟶ … ⟶ …"



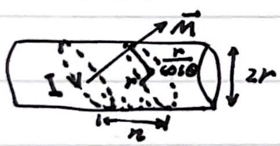
两圆弧导体片带电.
y 轴 $\pm b$ 处十分靠近
x 轴 $+b$ 处 E_b 已知.
求导体片间电势差

"… ⟶ … ⟶ …"

$$U_{ac}=\int_a^c \frac{2E_b}{1+\left(\frac{z}{b}\right)^2}dz=2bE_b\,tg^{-1}\frac{b(c-a)}{b^2+ac}$$

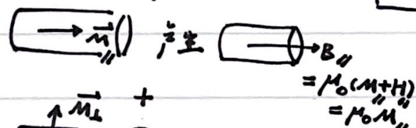
$\boxed{Ex}$ 斜绕螺线管：n 为单位长度匝数.

I. 椭圆环



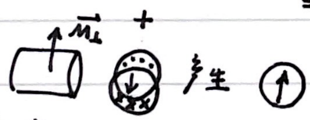
分解 前进电流

\+



产生 $B_{/\!/}=\mu_0(M_{/\!/}+H_{/\!/})=\mu_0 M_{/\!/}$

\+

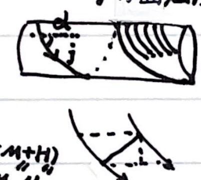


产生 $B_\perp=\mu_0(M_\perp+H_\perp)=\mu_0\dfrac{M_\perp}{2}$

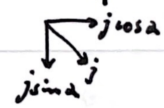
外部类似.

II. 等距螺线（始终与 $\hat{x}$ 向夹 α 角）

（j 为面密度 $In_\perp$）



分解（$d\vec{l}$ 的分解性质？）



分别产生 $B_\perp$, $B_{/\!/}$.

No. 4

Date

△ 电阻网络：磁场 (2)